Análise de Algoritmos
Aula 09

Prof. Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

(material da disciplina: André Guedes, Renato Carmo, Murilo da Silva)

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Esquema geral:

1. dividir a instância em sub-instâncias menores do mesmo problema,
2. resolver cada sub-instância recursivamente,
3. combinar as respostas das sub-instâncias de forma a obter uma resposta da instância original.

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Esquema geral:

1. dividir a instância em sub-instâncias menores do mesmo problema,
2. resolver cada sub-instância recursivamente,
3. combinar as respostas das sub-instâncias de forma a obter uma resposta da instância original.

Um exemplo paradigmático:

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Esquema geral:

1. dividir a instância em sub-instâncias menores do mesmo problema,
2. resolver cada sub-instância recursivamente,
3. combinar as respostas das sub-instâncias de forma a obter uma resposta da instância original.

Um exemplo paradigmático:

- Algoritmo MergeSort:

Ordena(v, a, b)

Se $a \geq b$
    Termine
$m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
Ordena(v, a, m)
Ordena(v, $m+1$, b)
Intercala(v, a, m, b)

Outros Exemplos conhecidos

- Busca Binária
- Transformada Rápida de Fourier
- Multiplicação Inteiros (Karatsuba)
- Multiplicação de Matrizes (Strassen)

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Outros Exemplos conhecidos

- Busca Binária
- Transformada Rápida de Fourier
- Multiplicação Inteiros (Karatsuba)
- Multiplicação de Matrizes (Strassen)

Nestes algoritmos, temos a grosso modo:

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Outros Exemplos conhecidos

- Busca Binária
- Transformada Rápida de Fourier
- Multiplicação Inteiros (Karatsuba)
- Multiplicação de Matrizes (Strassen)

Nestes algoritmos, temos a grosso modo:

DC(I)

compute a partir da instância I, sub-instâncias $I_1, \ldots, I_a$
Para $i \in [1..a]$
    $R_i \leftarrow \mathrm{DC}(I_i)$
A partir de $R_1, \ldots, R_a$, compute uma resposta R para I
Devolva R

"Recorrência típica" de algoritmos de D & C

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

"Recorrência típica" de algoritmos de D & C

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$

- Atenção, o termo $aT(n/b)$ pode ser perigoso

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

"Recorrência típica" de algoritmos de D & C

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$

- Atenção, o termo $aT(n/b)$ pode ser perigoso
- Onde estão o "chão" e o "teto"?

"Recorrência típica" de algoritmos de D & C

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$

- Atenção, o termo $aT(n/b)$ pode ser perigoso
- Onde estão o "chão" e o "teto"?
- A seguir formalizaremos o que $aT(n/b)$ significa

Formalizando a recorrência do slide anterior

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Formalizando a recorrência do slide anterior

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$

- Mais precisamente, $aT(n/b)$ denota a soma de a parcelas que podem ser
  - tanto $T(\lfloor n/b \rfloor)$
  - como $T(\lceil n/b \rceil)$

Formalizando a recorrência do slide anterior

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$

- Mais precisamente, $aT(n/b)$ denota a soma de a parcelas que podem ser
  - tanto $T\left(\lfloor n/b \rfloor\right)$
  - como $T\left(\lceil n/b \rceil\right)$
- Ou seja,

Formalizando a recorrência do slide anterior

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$

- Mais precisamente, $aT(n/b)$ denota a soma de a parcelas que podem ser
  - tanto $T\left(\lfloor n/b \rfloor\right)$
  - como $T\left(\lceil n/b \rceil\right)$
- Ou seja,

$$aT(n/b) = i(n)T\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + (a - i(n))T\left(\lceil n/b \rceil\right),$$

Formalizando a recorrência do slide anterior

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$

- Mais precisamente, $aT(n/b)$ denota a soma de a parcelas que podem ser
  - tanto $T\left(\lfloor n/b \rfloor\right)$
  - como $T\left(\lceil n/b \rceil\right)$
- Ou seja,

$$aT(n/b) = i(n)T\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + (a - i(n))T\left(\lceil n/b \rceil\right), \text{ para algum } i\colon \mathbb{N} \to [0..a].$$

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$.

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Então

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

$$\text{Então} \qquad T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

$$\text{Então} \qquad T(n) = a^{u(n)}T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

onde $\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0$,

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

Se $$T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Então $$T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

onde $\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0$,

De forma que $$a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)}).$$

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

$$\text{Então} \qquad T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

$$\text{onde } \left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0,$$

$$\text{De forma que} \qquad a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)}).$$

Além disso,

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

$$\text{Então} \qquad T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

$$\text{onde } \left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0,$$

$$\text{De forma que} \qquad a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)}).$$

$$\text{Além disso,} \qquad u(n) = \lfloor \log_b(n - n_0) \rfloor + 1 = \log_b n + \mathcal{O}(1),$$

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

$$\text{Então} \qquad T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

$$\text{onde } \left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0,$$

$$\text{De forma que} \qquad a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)}).$$

$$\text{Além disso,} \qquad u(n) = \lfloor \log_b (n - n_0) \rfloor + 1 = \log_b n + \mathcal{O}(1),$$

e daí, como $\quad a^{u(n)} = a^{\log_b n + \mathcal{O}(1)}$

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

$$\text{Então} \qquad T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

onde $\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0$,

$$\text{De forma que} \qquad a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)}).$$

$$\text{Além disso,} \qquad u(n) = \lfloor \log_b(n - n_0) \rfloor + 1 = \log_b n + \mathcal{O}(1),$$

e daí, como $\quad a^{u(n)} = a^{\log_b n + \mathcal{O}(1)} = a^{\mathcal{O}(1)} a^{\log_b n}$

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

$$\text{Então} \qquad T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

onde $\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0$,

$$\text{De forma que} \qquad a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)}).$$

$$\text{Além disso,} \qquad u(n) = \lfloor \log_b (n - n_0) \rfloor + 1 = \log_b n + \mathcal{O}(1),$$

$$\text{e daí, como} \quad a^{u(n)} = a^{\log_b n + \mathcal{O}(1)} = a^{\mathcal{O}(1)} a^{\log_b n} = \mathcal{O}(1) n^{\log_b a}$$

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

$$\text{Então} \qquad T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

onde $\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0$,

$$\text{De forma que} \qquad a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)}).$$

$$\text{Além disso,} \qquad u(n) = \lfloor \log_b(n - n_0) \rfloor + 1 = \log_b n + \mathcal{O}(1),$$

$$\text{e daí, como} \quad a^{u(n)} = a^{\log_b n + \mathcal{O}(1)} = a^{\mathcal{O}(1)} a^{\log_b n} = \mathcal{O}(1) n^{\log_b a} = \mathcal{O}(n^{\log_b a}),$$

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

Se $\quad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n)$, para todo $n \geq n_0$,

Então $\quad T(n) = a^{u(n)}T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right)$,

onde $\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0$,

De forma que $\quad a^{u(n)}T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)}\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)})$.

Além disso, $\quad u(n) = \lfloor \log_b(n - n_0) \rfloor + 1 = \log_b n + \mathcal{O}(1)$,

e daí, como $\quad a^{u(n)} = a^{\log_b n + \mathcal{O}(1)} = a^{\mathcal{O}(1)} a^{\log_b n} = \mathcal{O}(1) n^{\log_b a} = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$,

então $\quad \mathcal{O}(a^{u(n)}) = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$,

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

$$\text{Se} \qquad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

$$\text{Então} \qquad T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right),$$

$$\text{onde } \left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0,$$

$$\text{De forma que} \qquad a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)}).$$

$$\text{Além disso,} \qquad u(n) = \lfloor \log_b(n - n_0) \rfloor + 1 = \log_b n + \mathcal{O}(1),$$

$$\text{e daí, como} \quad a^{u(n)} = a^{\log_b n + \mathcal{O}(1)} = a^{\mathcal{O}(1)} a^{\log_b n} = \mathcal{O}(1) n^{\log_b a} = \mathcal{O}(n^{\log_b a}),$$

$$\text{então} \quad \mathcal{O}(a^{u(n)}) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}),$$

Consequentemente:

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Olhando o caso do "chão":

Se $\quad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n)$, para todo $n \geq n_0$,

Então $\quad T(n) = a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right)$,

onde $\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor < n_0$,

De forma que $\quad a^{u(n)} T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^{u(n)}} \right\rfloor\right) = a^{u(n)} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(a^{u(n)})$.

Além disso, $\quad u(n) = \lfloor \log_b (n - n_0) \rfloor + 1 = \log_b n + \mathcal{O}(1)$,

e daí, como $\quad a^{u(n)} = a^{\log_b n + \mathcal{O}(1)} = a^{\mathcal{O}(1)} a^{\log_b n} = \mathcal{O}(1) n^{\log_b a} = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$,

então $\quad \mathcal{O}(a^{u(n)}) = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$,

Consequentemente:

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right).$$

Do mesmo modo, se

Do mesmo modo, se

$$T(n) = aT\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Do mesmo modo, se

$$T(n) = aT\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

por desenvolvimento análogo ao slide anterior concluímos que

Do mesmo modo, se

$$T(n) = aT\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

por desenvolvimento análogo ao slide anterior concluímos que

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lceil \frac{n}{b^i} \right\rceil\right),$$

Do mesmo modo, se

$$T(n) = aT\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

por desenvolvimento análogo ao slide anterior concluímos que

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lceil \frac{n}{b^i} \right\rceil\right),$$

$$\text{onde } u(n) = \log_b n + \mathcal{O}(1).$$

Portanto

Agora eliminando "chão e teto" temos

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

então

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right),$$

onde

$$u(n) = \log_b n + \mathcal{O}(1).$$

Do mesmo modo, se

$$T(n) = aT\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

por desenvolvimento análogo ao slide anterior concluímos que

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\left\lceil \frac{n}{b^i} \right\rceil\right),$$

onde $u(n) = \log_b n + \mathcal{O}(1)$.

Portanto

Agora eliminando "chão e teto" temos

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

então

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right),$$

onde

$$u(n) = \log_b n + \mathcal{O}(1).$$

- O primeiro ou o segundo termo é dominante assintoticamente?

Caso 1: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Neste caso,

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\right)$$

Caso 1: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Neste caso,

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\right)$$

Como

Caso 1: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Neste caso,

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\right)$$

Como

$$\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i$$

Caso 1: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Neste caso,

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\right)$$

Como

$$\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i$$

Então

Caso 1: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Neste caso,

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\right)$$

Como

$$\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i$$

Então

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right) = n^{\log_b a}\Theta\left(\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right)$$

Caso 1: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Neste caso,

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\right)$$

Como

$$\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i$$

Então

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right) = n^{\log_b a}\Theta\left(\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right)$$

Consequentemente

Caso 1: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Neste caso,

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\right)$$

Como

$$\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i$$

Então

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right) = n^{\log_b a}\Theta\left(\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right)$$

Consequentemente

$$\sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i n^{\log_b a}\Theta\left(\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right)$$

Caso 1: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Neste caso,

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\right)$$

Como

$$\left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^i}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i$$

Então

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \Theta\left(n^{\log_b a}\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right) = n^{\log_b a}\Theta\left(\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right)$$

Consequentemente

$$\sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \sum_{i=0}^{u(n)-1} a^i n^{\log_b a}\Theta\left(\left(\frac{1}{b^{\log_b a}}\right)^i\right)$$

$$= n^{\log_b a}\sum_{i=0}^{u(n)-1}\Theta\left(\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i\right)$$

$$= n^{\log_b a}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i\right),$$

Ou seja

Ou seja

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i\right).$$

Ou seja

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i\right).$$

Como

$$b^{\log_b a} = a,$$

Ou seja

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i\right).$$

Como

$$b^{\log_b a} = a,$$

Temos

Divisão e Conquista e o Teorema Mestre

Ou seja

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i\right).$$

Como

$$b^{\log_b a} = a,$$

Temos

$$\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i = \sum_{i=0}^{u(n)-1} 1^i = u(n) = \log_b n + \mathcal{O}(1),$$

Ou seja

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i\right).$$

Como

$$b^{\log_b a} = a,$$

Temos

$$\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i = \sum_{i=0}^{u(n)-1} 1^i = u(n) = \log_b n + \mathcal{O}(1),$$

Com isso

Ou seja

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i\right).$$

Como

$$b^{\log_b a} = a,$$

Temos

$$\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^i = \sum_{i=0}^{u(n)-1} 1^i = u(n) = \log_b n + \mathcal{O}(1),$$

Com isso

$$\begin{aligned} T(n) &= \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a}\Theta\left(\log_b n + \mathcal{O}(1)\right) \\ &= \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + \Theta(n^{\log_b a}\log n) \\ &= \Theta(n^{\log_b a}\log n). \end{aligned}$$

Caso 2: $f(n) \ll n^{\log_b a}$

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$,

Caso 2: $f(n) \ll n^{\log_b a}$

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$,

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

Caso 2: $f(n) \ll n^{\log_b a}$

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$,

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a - \epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^i\right).$$

Caso 2: $f(n) \ll n^{\log_b a}$

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$,

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a - \epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^i\right).$$

(única diferença: apareceu o **"$- \epsilon$"**)

Caso 2: $f(n) \ll n^{\log_b a}$

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$,

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a - \epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^i\right).$$

(única diferença: apareceu o **"$-\ \epsilon$"**)

$$\text{Como}\quad \frac{a}{b^{\log_b a-\epsilon}} = \frac{a}{b^{\log_b a}/b^{\epsilon}} = \frac{a}{a/b^{\epsilon}} = b^{\epsilon},$$

Caso 2: $f(n) \ll n^{\log_b a}$

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$,

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a - \epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^i\right).$$

(única diferença: apareceu o **"$-\ \epsilon$"**)

$$\text{Como} \quad \frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}} = \frac{a}{b^{\log_b a}/b^{\epsilon}} = \frac{a}{a/b^{\epsilon}} = b^{\epsilon},$$

$$\text{Então} \quad \sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^i = \sum_{i=0}^{u(n)-1}(b^{\epsilon})^i = \frac{(b^{\epsilon})^{u(n)} - 1}{b^{\epsilon} - 1} = \frac{b^{\epsilon u(n)} - 1}{b^{\epsilon} - 1}$$

Caso 2: $f(n) \ll n^{\log_b a}$

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$,

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a - \epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^i\right).$$

(única diferença: apareceu o **"$-\ \epsilon$"**)

$$\text{Como}\quad \frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}} = \frac{a}{b^{\log_b a}/b^{\epsilon}} = \frac{a}{a/b^{\epsilon}} = b^{\epsilon},$$

$$\text{Então}\quad \sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^i = \sum_{i=0}^{u(n)-1}(b^{\epsilon})^i = \frac{(b^{\epsilon})^{u(n)} - 1}{b^{\epsilon} - 1} = \frac{b^{\epsilon u(n)} - 1}{b^{\epsilon} - 1}$$

$$\text{Como}\quad \epsilon u(n) = \epsilon(\log_b n + \mathcal{O}(1)) = \log_b n^{\epsilon} + \mathcal{O}(1)\epsilon = \log_b n^{\epsilon} + \mathcal{O}(1),$$

Caso 2: $f(n) \ll n^{\log_b a}$

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$,

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a - \epsilon} \Theta \left(\sum_{i=0}^{u(n)-1} \left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}} \right)^i \right).$$

(única diferença: apareceu o **"$-\ \epsilon$"**)

$$\text{Como} \quad \frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}} = \frac{a}{b^{\log_b a}/b^{\epsilon}} = \frac{a}{a/b^{\epsilon}} = b^{\epsilon},$$

$$\text{Então} \quad \sum_{i=0}^{u(n)-1} \left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}} \right)^i = \sum_{i=0}^{u(n)-1} (b^{\epsilon})^i = \frac{(b^{\epsilon})^{u(n)} - 1}{b^{\epsilon} - 1} = \frac{b^{\epsilon u(n)} - 1}{b^{\epsilon} - 1}$$

$$\text{Como} \quad \epsilon u(n) = \epsilon(\log_b n + \mathcal{O}(1)) = \log_b n^{\epsilon} + \mathcal{O}(1)\epsilon = \log_b n^{\epsilon} + \mathcal{O}(1),$$

$$\text{Então} \quad b^{\epsilon u(n)} = b^{\log_b n^{\epsilon} + \mathcal{O}(1)} = n^{\epsilon} b^{\mathcal{O}(1)} = \Theta(n^{\epsilon})$$

Caso 2: $f(n) \ll n^{\log_b a}$

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$,

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a - \epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^i\right).$$

(única diferença: apareceu o **"$-\ \epsilon$"**)

$$\text{Como} \quad \frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}} = \frac{a}{b^{\log_b a}/b^{\epsilon}} = \frac{a}{a/b^{\epsilon}} = b^{\epsilon},$$

$$\text{Então} \quad \sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^i = \sum_{i=0}^{u(n)-1}(b^{\epsilon})^i = \frac{(b^{\epsilon})^{u(n)} - 1}{b^{\epsilon} - 1} = \frac{b^{\epsilon u(n)} - 1}{b^{\epsilon} - 1}$$

$$\text{Como} \quad \epsilon u(n) = \epsilon(\log_b n + \mathcal{O}(1)) = \log_b n^{\epsilon} + \mathcal{O}(1)\epsilon = \log_b n^{\epsilon} + \mathcal{O}(1),$$

$$\text{Então} \quad b^{\epsilon u(n)} = b^{\log_b n^{\epsilon} + \mathcal{O}(1)} = n^{\epsilon} b^{\mathcal{O}(1)} = \Theta(n^{\epsilon})$$

$$\text{Com isso} \quad \frac{b^{\epsilon u(n)} - 1}{b^{\epsilon} - 1} = \frac{\Theta(n^{\epsilon}) - 1}{b^{\epsilon} - 1} = \Theta(n^{\epsilon}),$$

A partir daí,

A partir daí,

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a-\epsilon}\Theta\left(n^{\epsilon}\right) \\ &= \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta\left(n^{\log_b a-\epsilon+\epsilon}\right) \\ &= \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta\left(n^{\log_b a}\right) \\ &= \Theta(n^{\log_b a}). \end{aligned}$$

Caso 3: $f(n) \gg \Theta(n^{\log_b a})$
e se existe $c < 1$ tal que $af(n/b) < cf(n)$, assintoticamente
(aqui precisamos desse cuidado extra)

Caso 3: $f(n) \gg \Theta(n^{\log_b a})$
e se existe $c < 1$ tal que $af(n/b) < cf(n)$, assintoticamente
(aqui precisamos desse cuidado extra)

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$, e se existe $c < 1$ tal que

$$af(n/b) < cf(n), \text{ assintoticamente,}$$

Caso 3: $f(n) \gg \Theta(n^{\log_b a})$
e se existe $c < 1$ tal que $af(n/b) < cf(n)$, assintoticamente
(aqui precisamos desse cuidado extra)

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$, e se existe $c < 1$ tal que

$$af(n/b) < cf(n), \text{ assintoticamente,}$$

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

Caso 3: $f(n) \gg \Theta(n^{\log_b a})$
e se existe $c < 1$ tal que $af(n/b) < cf(n),$ assintoticamente
(aqui precisamos desse cuidado extra)

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$, e se existe $c < 1$ tal que

$$af(n/b) < cf(n), \text{ assintoticamente},$$

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a+\epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a+\epsilon}}\right)^i\right),$$

(novamente: única diferença é o **“+ ϵ”**)

Caso 3: $f(n) \gg \Theta(n^{\log_b a})$
e se existe $c < 1$ tal que $af(n/b) < cf(n)$, assintoticamente
(aqui precisamos desse cuidado extra)

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$, e se existe $c < 1$ tal que

$$af(n/b) < cf(n), \text{ assintoticamente,}$$

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a+\epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a+\epsilon}}\right)^i\right),$$

(novamente: única diferença é o **"+ ϵ"**)

$$\text{Como} \quad \frac{a}{b^{\log_b a+\epsilon}} = \frac{a}{b^{\log_b a}b^{\epsilon}} = \frac{a}{ab^{\epsilon}} = \frac{1}{b^{\epsilon}},$$

Caso 3: $f(n) \gg \Theta(n^{\log_b a})$

e se existe $c < 1$ tal que $af(n/b) < cf(n)$, assintoticamente
(aqui precisamos desse cuidado extra)

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$, e se existe $c < 1$ tal que

$$af(n/b) < cf(n), \text{ assintoticamente,}$$

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a+\epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a+\epsilon}}\right)^i\right),$$

(novamente: única diferença é o **"$+\ \epsilon$"**)

$$\text{Como} \quad \frac{a}{b^{\log_b a+\epsilon}} = \frac{a}{b^{\log_b a}b^{\epsilon}} = \frac{a}{ab^{\epsilon}} = \frac{1}{b^{\epsilon}},$$

$$\text{Então} \quad \sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{1}{b^{\epsilon}}\right)^i = \Theta(1),$$

Caso 3: $f(n) \gg \Theta(n^{\log_b a})$
e se existe $c < 1$ tal que $af(n/b) < cf(n)$, assintoticamente
(aqui precisamos desse cuidado extra)

Neste caso, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$, e se existe $c < 1$ tal que

$$af(n/b) < cf(n), \text{ assintoticamente,}$$

Por desenvolvimento análogo ao caso anterior, chegamos a

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a+\epsilon}\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{a}{b^{\log_b a+\epsilon}}\right)^i\right),$$

(novamente: única diferença é o **"$+\ \epsilon$"**)

$$\text{Como} \quad \frac{a}{b^{\log_b a+\epsilon}} = \frac{a}{b^{\log_b a}b^{\epsilon}} = \frac{a}{ab^{\epsilon}} = \frac{1}{b^{\epsilon}},$$

$$\text{Então} \quad \sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{1}{b^{\epsilon}}\right)^i = \Theta(1),$$

$$\text{Pois} \quad 0 < \sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{1}{b^{\epsilon}}\right)^i \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b^{\epsilon}}\right)^i = \frac{1}{1-b^{\epsilon}} = \Theta(1),$$

Consequentemente:

Consequentemente:

$$\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{1}{b^{\epsilon}}\right)^{i}\right)=\Theta(\Theta(1))=\Theta(1),$$

Consequentemente:

$$\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{1}{b^{\epsilon}}\right)^{i}\right)=\Theta(\Theta(1))=\Theta(1),$$

Portanto

Consequentemente:

$$\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{1}{b^{\epsilon}}\right)^{i}\right) = \Theta(\Theta(1)) = \Theta(1),$$

Portanto

$$\begin{aligned}
T(n) &= \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a+\epsilon}\sum_{i=0}^{u(n)-1}\Theta\left(\left(\frac{a}{b^{l}}\right)^{i}\right)\\
&= \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a+\epsilon}\Theta(1)\\
&= \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + \Theta(n^{\log_b a+\epsilon})\\
&= \Theta(n^{\log_b a+\epsilon})
\end{aligned}$$

Consequentemente:

$$\Theta\left(\sum_{i=0}^{u(n)-1}\left(\frac{1}{b^{\epsilon}}\right)^{i}\right) = \Theta(\Theta(1)) = \Theta(1),$$

Portanto

$$\begin{aligned}
T(n) &= \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a+\epsilon}\sum_{i=0}^{u(n)-1}\Theta\left(\left(\frac{a}{b^{l}}\right)^{i}\right)\\
&= \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + n^{\log_b a+\epsilon}\Theta(1)\\
&= \mathcal{O}(n^{\log_b a}) + \Theta(n^{\log_b a+\epsilon})\\
&= \Theta(n^{\log_b a+\epsilon})
\end{aligned}$$

Finalmente, como $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$ e $T(n) = \Theta(n^{\log_b a+\epsilon})$, podemos concluir

$$T(n) = \Theta(f(n)).$$

Teorema 43 ("Teorema Mestre")

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$, $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

então

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{se } f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon}), \text{ para algum } \epsilon > 0, \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n), & \text{se } f(n) = \Theta(n^{\log_b a}), \\ \Theta(f(n)), & \text{se } f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}), \text{ para algum } \epsilon > 0 \text{ e} \\ & af(n/b) < cf(n) \text{ assintoticamente para algum } c < 1. \end{cases}$$