Análise de Algoritmos
Aula 15

Prof. Murilo V. G. da Silva

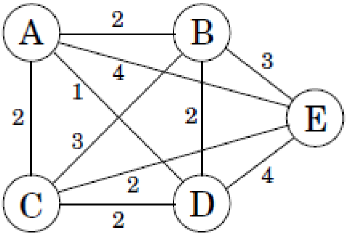
DINF/UFPR

(material da disciplina: André Guedes, Renato Carmo, Murilo da Silva)

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Qual é o circuito hamiltoniano de menor custo no seguinte grafo?

Qual é o circuito hamiltoniano de menor custo no seguinte grafo?



Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma matriz D indexada por $[1..n] \times [1..n]$

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma matriz D indexada por $[1..n] \times [1..n]$

- definimos o *custo da sequência* $(c_1, \ldots, c_k)$ sobre $[1..n]$ por:

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma matriz D indexada por $[1..n] \times [1..n]$

- definimos o *custo da sequência* $(c_1, \ldots, c_k)$ sobre $[1..n]$ por:

$$D(c_0, \ldots, c_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} D[c_i, c_{i+1}].$$

Caixeiro Viajante (CV)

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma matriz D indexada por $[1..n] \times [1..n]$

- definimos o *custo da sequência* $(c_1, \ldots, c_k)$ sobre $[1..n]$ por:

$$D(c_0, \ldots, c_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} D[c_i, c_{i+1}].$$

Caixeiro Viajante (CV)

- Entrada: Uma matriz D indexada por $[1..n] \times [1..n]$.
- Saída: $r(D) = \min \{D(c_1, \ldots, c_n, c_1) \mid (c_1, \ldots, c_n) \text{ é permutação sobre } [1..n]\}$

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma matriz D indexada por $[1..n] \times [1..n]$

- definimos o *custo da sequência* $(c_1, \ldots, c_k)$ sobre $[1..n]$ por:

$$D(c_0, \ldots, c_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} D[c_i, c_{i+1}].$$

Caixeiro Viajante (CV)

- Entrada: Uma matriz D indexada por $[1..n] \times [1..n]$.
- Saída: $r(D) = \min \{D(c_1, \ldots, c_n, c_1) \mid (c_1, \ldots, c_n)$ é permutação sobre $[1..n]\}$

Teorema

O algoritmo que computa o custo de cada uma das $(n-1)!$ permutações circulares sobre $[1..n]$ e devolve o menor deles tem tempo de execução $\Theta(n!)$.

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma matriz D indexada por $[1..n] \times [1..n]$

- definimos o *custo da sequência* $(c_1, \ldots, c_k)$ sobre $[1..n]$ por:

$$D(c_0, \ldots, c_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} D[c_i, c_{i+1}].$$

Caixeiro Viajante (CV)

- Entrada: Uma matriz D indexada por $[1..n] \times [1..n]$.
- Saída: $r(D) = \min \{D(c_1, \ldots, c_n, c_1) \mid (c_1, \ldots, c_n)$ é permutação sobre $[1..n]\}$

Teorema

O algoritmo que computa o custo de cada uma das $(n-1)!$ permutações circulares sobre $[1..n]$ e devolve o menor deles tem tempo de execução $\Theta(n!)$.

Prova: Exercício.

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma instância D de dimensão n de CV, para cada $S \subseteq [2..n]$ e cada $u \in S$ denotamos por $D(S, u)$ o custo de uma permutação sobre $S \cup \{1\}$ que começa com 1 e termina com u, isto é,

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma instância D de dimensão n de CV, para cada $S \subseteq [2..n]$ e cada $u \in S$ denotamos por $D(S, u)$ o custo de uma permutação sobre $S \cup \{1\}$ que começa com 1 e termina com u, isto é,

$$D(S, u) = \min\{D(1, \ldots, u) \mid (1, \ldots, u) \text{ é permutação sobre } S \cup \{1\}\}.$$

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma instância D de dimensão n de CV, para cada $S \subseteq [2..n]$ e cada $u \in S$ denotamos por $D(S, u)$ o custo de uma permutação sobre $S \cup \{1\}$ que começa com 1 e termina com u, isto é,

$$D(S, u) = \min \{D(1, \ldots, u) \mid (1, \ldots, u) \text{ é permutação sobre } S \cup \{1\}\}.$$

Lema

A resposta da instância D de dimensão n de CV é

$$r(D) = \min \{D([2..n], u) + D[u, 1] \mid u \in [2..n]\}.$$

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma instância D de dimensão n de CV, para cada $S \subseteq [2..n]$ e cada $u \in S$ denotamos por $D(S, u)$ o custo de uma permutação sobre $S \cup \{1\}$ que começa com 1 e termina com u, isto é,

$$D(S, u) = \min \{D(1, \ldots, u) \mid (1, \ldots, u) \text{ é permutação sobre } S \cup \{1\}\}.$$

Lema

A resposta da instância D de dimensão n de CV é

$$r(D) = \min \{D([2..n], u) + D[u, 1] \mid u \in [2..n]\}.$$

Prova: Opcional.

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma instância D de dimensão n de CV, para cada $S \subseteq [2..n]$ e cada $u \in S$ denotamos por $D(S, u)$ o custo de uma permutação sobre $S \cup \{1\}$ que começa com 1 e termina com u, isto é,

$$D(S, u) = \min \{D(1, \ldots, u) \mid (1, \ldots, u) \text{ é permutação sobre } S \cup \{1\}\}.$$

Lema

A resposta da instância D de dimensão n de CV é

$$r(D) = \min \{D([2..n], u) + D[u, 1] \mid u \in [2..n]\}.$$

Prova: Opcional.

Teorema

Seja D uma instância de CV e seja $n = \dim(D)$. Para todo $S \subseteq [2..n]$ e todo $u \in [2..n]$,

$$D(S, u) = \begin{cases} D[1, u], & \text{se } S = \{u\}, \\ \min \{D(S - \{u\}, p) + D[p, u] \mid p \in S - \{u\}\}, & \text{se } |S| > 1. \end{cases}$$

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Dada uma instância D de dimensão n de CV, para cada $S \subseteq [2..n]$ e cada $u \in S$ denotamos por $D(S,u)$ o custo de uma permutação sobre $S \cup \{1\}$ que começa com 1 e termina com u, isto é,

$$D(S,u) = \min\{D(1,\ldots,u) \mid (1,\ldots,u) \text{ é permutação sobre } S \cup \{1\}\}.$$

Lema

A resposta da instância D de dimensão n de CV é

$$r(D) = \min\{D([2..n],u) + D[u,1] \mid u \in [2..n]\}.$$

Prova: Opcional.

Teorema

Seja D uma instância de CV e seja $n = \dim(D)$. Para todo $S \subseteq [2..n]$ e todo $u \in [2..n]$,

$$D(S,u) = \begin{cases} D[1,u], & \text{se } S = \{u\}, \\ \min\{D(S-\{u\},p) + D[p,u] \mid p \in S-\{u\}\}, & \text{se } |S| > 1. \end{cases}$$

Prova: Opcional

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

CaixeiroViajante$_R(D)$

```
Se dim(D) = 1
    Devolva 0
c ← ∞
Para u de 2 até n
    d ← CustoMenorCaminho_R([2..n], u, D) + D[u, 1]
    Se c > d
        c ← d
Devolva c
```

onde

CustoMenorCaminho$_R(S, u, D)$

```
Se S = {u}
    Devolva D[1, u]
c ← ∞
Para cada p ∈ S − {u}
    d ← CustoMenorCaminho_R(S − {u}, p, D) + D[p, u]
    Se c > d
        c ← d
Devolva c
```

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto?

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Direto da Recorrência.

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Direto da Recorrência.
- Quanto custa?

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Direto da Recorrência.
- Quanto custa?

Teorema

A execução de $\text{CustoMenorCaminho}_R(D)$ toma tempo $\Theta((n-1)!)$ e espaço $\Theta(n^2)$ onde $n = \dim(D)$.

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Direto da Recorrência.
- Quanto custa?

Teorema

A execução de $\text{CustoMenorCaminho}_R(D)$ toma tempo $\Theta((n-1)!)$ e espaço $\Theta(n^2)$ onde $n = \dim(D)$.

Prova: Exercício

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Direto da Recorrência.
- Quanto custa?

Teorema

A execução de $\text{CustoMenorCaminho}_R(D)$ toma tempo $\Theta((n-1)!)$ e espaço $\Theta(n^2)$ onde $n = \dim(D)$.

Prova: Exercício

Corolario

A execução de $\text{CaixeiroViajante}_R(D)$ toma tempo $\Theta(n!)$ e espaço $\Theta(n^2)$ onde $n = \dim(D)$.

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Direto da Recorrência.
- Quanto custa?

Teorema

A execução de CustoMenorCaminho$_R(D)$ toma tempo $\Theta((n-1)!)$ e espaço $\Theta(n^2)$ onde $n = \dim(D)$.

Prova: Exercício

Corolario

A execução de CaixeiroViajante$_R(D)$ toma tempo $\Theta(n!)$ e espaço $\Theta(n^2)$ onde $n = \dim(D)$.

Prova: Exercício

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Direto da Recorrência.
- Quanto custa?

Teorema

A execução de $\text{CustoMenorCaminho}_R(D)$ toma tempo $\Theta((n-1)!)$ e espaço $\Theta(n^2)$ onde $n = \dim(D)$.

Prova: Exercício

Corolario

A execução de $\text{CaixeiroViajante}_R(D)$ toma tempo $\Theta(n!)$ e espaço $\Theta(n^2)$ onde $n = \dim(D)$.

Prova: Exercício

- Da para fazer melhor?

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

CaixeiroViajante$_D(D)$

$C \leftarrow$ CustoMenorCaminho$_D(D)$
$c \leftarrow \infty$
Para u *de* 2 *até* n
    $d \leftarrow C[[2..n], u] + D[u, 1]$
    Se $c > d$
        $c \leftarrow d$
Devolva c

CustoMenorCaminho$_D(D)$

$C \leftarrow$ matriz indexada por $2^{[2..n]} \times [2..n]$
Para u *de* 2 *até* n
    $C[\{u\}, u] \leftarrow D[1, u]$
Para k *de* 2 *até* $n - 1$
    Para *cada* $S \in \binom{[2..n]}{k}$
        Para *cada* $u \in S$
            Preenche(C, S, u)
Devolva C

Preenche(C, S, u)

$C[S, u] \leftarrow \infty$
Para *cada* $p \in S - \{u\}$
    $c \leftarrow C[S - \{u\}, p] + D[p, u]$
    Se $C[S, u] > c$
        $C[S, u] \leftarrow c$

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto?

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Também da recorrência, mas de maneira iterativa.

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Também da recorrência, mas de maneira iterativa.
- Quanto custa?

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

- Está correto? Também da recorrência, mas de maneira iterativa.
- Quanto custa?

Teorema

A execução de $\text{CaixeiroViajante}_D(M)$ toma tempo $\Theta(n^2 2^n)$ e espaço $\Theta(n 2^n)$ onde $n = \dim(M)$.

- Está correto? Também da recorrência, mas de maneira iterativa.
- Quanto custa?

Teorema

A execução de $\text{CaixeiroViajante}_D(M)$ toma tempo $\Theta(n^2 2^n)$ e espaço $\Theta(n2^n)$ onde $n = \dim(M)$.

Prova: Próxima página

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Seja D uma instância de CV. O número de posições de C é

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Seja D uma instância de CV. O número de posições de C é

$$|2^{[2..n]} \times [2..n]| = |2^{[2..n]}||[2..n]| = (n-1)2^{n-1} = \Theta(n2^n).$$

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Seja D uma instância de CV. O número de posições de C é

$$|2^{[2..n]} \times [2..n]| = |2^{[2..n]}||[2..n]| = (n-1)2^{n-1} = \Theta(n2^n).$$

Além disso,

Algoritmo de Bellman-Held-Karp

Seja D uma instância de CV. O número de posições de C é

$$|2^{[2..n]} \times [2..n]| = |2^{[2..n]}||[2..n]| = (n-1)2^{n-1} = \Theta(n2^n).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
T_{\text{CaixeiroViajante}}(D) &= \Theta(1) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{S \in \binom{[2..n]}{k}} \sum_{u \in S} \left(\Theta(1) + \sum_{p \in S - \{u\}} \Theta(1) \right) \\
&= \Theta(1) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{S \in \binom{[2..n]}{k}} \sum_{u \in S} (\Theta(1) + (|S|-1)\Theta(1)) \\
&= \Theta(1) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{S \in \binom{[2..n]}{k}} \sum_{u \in S} \Theta(|S|) \\
&= \Theta(1) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{S \in \binom{[2..n]}{k}} |S| (\Theta(|S|)) = \Theta(1) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{S \in \binom{[2..n]}{k}} \Theta(|S|^2) \\
&= \Theta(1) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{S \in \binom{[2..n]}{k}} \Theta(k^2) = \Theta(1) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n-1}{k} \Theta(k^2) \\
&\overset{\text{Ex.}}{=} \Theta(1) + \Theta(n^2 2^n) = \Theta(n^2 2^n)
\end{aligned}$$