Análise de Algoritmos
Aula 16

Prof. Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

(material da disciplina: André Guedes, Renato Carmo, Murilo da Silva)

Análise Amortizada: Incrementador binário

Como na discussão de multiplicação de inteiros:

Análise Amortizada: Incrementador binário

Como na discussão de multiplicação de inteiros:

- Dada uma sequência $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0) \in \{0, 1\}^n$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Como na discussão de multiplicação de inteiros:

- Dada uma sequência $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0) \in \{0, 1\}^n$
- $\overline{x}$ o *inteiro representado por* x *em base* 2

Análise Amortizada: Incrementador binário

Como na discussão de multiplicação de inteiros:

- Dada uma sequência $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0) \in \{0, 1\}^n$
- $\overline{x}$ o *inteiro representado por* x *em base* 2
  isto é,

Análise Amortizada: Incrementador binário

Como na discussão de multiplicação de inteiros:

- Dada uma sequência $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0) \in \{0,1\}^n$
- $\overline{x}$ o *inteiro representado por* x *em base* 2
  isto é,
  $$\overline{x} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i.$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Como na discussão de multiplicação de inteiros:

- Dada uma sequência $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0) \in \{0, 1\}^n$
- $\overline{x}$ o *inteiro representado por* x *em base* 2
  isto é,
  $$\overline{x} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i.$$

O *tamanho de* x será denotado por $|x|$,

Análise Amortizada: Incrementador binário

Como na discussão de multiplicação de inteiros:

- Dada uma sequência $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0) \in \{0,1\}^n$
- $\overline{x}$ o *inteiro representado por* x *em base* 2
  isto é,
  $$\overline{x} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i.$$

O *tamanho de* x será denotado por $|x|$,
isto é,

Como na discussão de multiplicação de inteiros:

- Dada uma sequência $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0) \in \{0,1\}^n$
- $\overline{x}$ o *inteiro representado por* x *em base* 2
  isto é,
  $$\overline{x} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i.$$

O *tamanho de* x será denotado por $|x|$,
isto é,
$$|(x_{n-1}, \ldots, x_0)| = n.$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Problema: Incrementador Binário (IB)

- Entrada: Uma sequência $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0)$ sobre $\{0, 1\}$ representando um inteiro n.
- Saída: A sequência x modificada de forma a representar $n + 1$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Problema: Incrementador Binário (IB)

- Entrada: Uma sequência $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0)$ sobre $\{0, 1\}$ representando um inteiro n.
- Saída: A sequência x modificada de forma a representar $n + 1$

Incrementa(x)

$i \leftarrow 0$
Enquanto $i < |x|$ e $x_i = 1$
    $x_i \leftarrow 0$
    $i \leftarrow i + 1$
Se $i < |x|$
    $x_i \leftarrow 1$
Senão
    acrescente 1 ao início de x

Análise Amortizada: Incrementador binário

- Está correto?

- Está correto?

Teorema

O Algoritmo Incrementa(x) é uma solução para IB.

Análise Amortizada: Incrementador binário

- Está correto?

Teorema

O Algoritmo Incrementa(x) é uma solução para IB.

Prova: Exercício.

Análise Amortizada: Incrementador binário

- Está correto?

Teorema

O Algoritmo Incrementa(x) é uma solução para IB.

Prova: Exercício.

- Quanto custa?

- Está correto?

Teorema

O Algoritmo Incrementa(x) é uma solução para IB.

Prova: Exercício.

- Quanto custa?
- Próximo slide

Análise Amortizada: Incrementador binário

Dado $x \in \{0,1\}^*$, definimos

$$b(x) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid x_k = 1 \text{ para todo } k \in [0..|x|-1]\}.$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Dado $x \in \{0,1\}^*$, definimos

$$b(x) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid x_k = 1 \text{ para todo } k \in [0..|x|-1]\}.$$

Observe que:

Análise Amortizada: Incrementador binário

Dado $x \in \{0,1\}^*$, definimos

$$b(x) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid x_k = 1 \text{ para todo } k \in [0..|x|-1]\}.$$

Observe que:
O número de mudanças nas posições de x na execução de Incrementa(x) é $b(x)+1$.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Dado $x \in \{0,1\}^*$, definimos

$$b(x) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid x_k = 1 \text{ para todo } k \in [0..|x|-1]\}.$$

Observe que:
O número de mudanças nas posições de x na execução de Incrementa(x) é $b(x) + 1$.

Teorema

O tempo de execução de Incrementa(x) é $\Theta(|b(x)|)$.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Dado $x \in \{0,1\}^*$, definimos

$$b(x) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid x_k = 1 \text{ para todo } k \in [0..|x|-1]\}.$$

Observe que:
O número de mudanças nas posições de x na execução de Incrementa(x) é $b(x) + 1$.

Teorema

O tempo de execução de Incrementa(x) é $\Theta(|b(x)|)$.

Prova:

Análise Amortizada: Incrementador binário

Dado $x \in \{0,1\}^*$, definimos

$$b(x) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid x_k = 1 \text{ para todo } k \in [0..|x|-1]\}.$$

Observe que:
O número de mudanças nas posições de x na execução de Incrementa(x) é $b(x)+1$.

Teorema

O tempo de execução de Incrementa(x) é $\Theta(|b(x)|)$.

Prova:

Do exame direto do Algoritmo Incrementa(x) temos

$$T_{\text{Incrementa}}(x) = \Theta(1) + (b(x)+1)\Theta(1) = \Theta(b(x)).$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(|x|)$.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(|x|)$.

Prova:

Como $b(x) \leq |x|$ para todo $x \in \{0,1\}^*$, temos (Teo.??, Ex. ??)

$$T_{\text{Incrementa}}(x) = \mathcal{O}(|x|),$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(|x|)$.

Prova:

Como $b(x) \leq |x|$ para todo $x \in \{0,1\}^*$, temos (Teo.??, Ex. ??)

$$T_{\text{Incrementa}}(x) = \mathcal{O}(|x|),$$

Teorema

Se $\overline{x} = 2^{\lg(\overline{x}+1)} - 1$, o tempo de execução de Incrementa(x) é $\Theta(|x|)$.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(|x|)$.

Prova:

Como $b(x) \leq |x|$ para todo $x \in \{0,1\}^*$, temos (Teo.??, Ex. ??)

$$T_{\text{Incrementa}}(x) = \mathcal{O}(|x|),$$

Teorema

Se $\overline{x} = 2^{\lg(\overline{x}+1)} - 1$, o tempo de execução de Incrementa(x) é $\Theta(|x|)$.

Prova:

Exercício.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(|x|)$.

Prova:

Como $b(x) \leq |x|$ para todo $x \in \{0,1\}^*$, temos (Teo.??, Ex. ??)

$$T_{\text{Incrementa}}(x) = \mathcal{O}(|x|),$$

Teorema

Se $\overline{x} = 2^{\lg(\overline{x}+1)} - 1$, o tempo de execução de Incrementa(x) é $\Theta(|x|)$.

Prova:

Exercício.

Corolario

O tempo de execução de pior caso de Incrementa(x) é $\Theta(|x|)$.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de pior caso de uma sequência de n execuções de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(n|x|)$.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de pior caso de uma sequência de n execuções de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(n|x|)$.

- É possível fazer melhor?

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de pior caso de uma sequência de n execuções de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(n|x|)$.

- É possível fazer melhor? É possível melhorar a análise:

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de pior caso de uma sequência de n execuções de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(n|x|)$.

- É possível fazer melhor? É possível melhorar a análise: o pior caso "não pode acontecer sempre".

Corolario

O tempo de execução de pior caso de uma sequência de n execuções de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(n|x|)$.

- É possível fazer melhor? É possível melhorar a análise: o pior caso "não pode acontecer sempre".

A *contagem até n em x* é uma sequência de n execuções de Incrementa(x) com $\overline{x} = 0$ antes da primeira execução.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de pior caso de uma sequência de n execuções de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(n|x|)$.

- É possível fazer melhor? É possível melhorar a análise: o pior caso "não pode acontecer sempre".

A *contagem até n em x* é uma sequência de n execuções de Incrementa(x) com $\overline{x} = 0$ antes da primeira execução.

Lema

Na contagem até n em x o valor de x_k muda a cada 2^k execuções de Incrementa(x).

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de pior caso de uma sequência de n execuções de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(n|x|)$.

- É possível fazer melhor? É possível melhorar a análise: o pior caso "não pode acontecer sempre".

A *contagem até n em x* é uma sequência de n execuções de Incrementa(x) com $\overline{x} = 0$ antes da primeira execução.

Lema

Na contagem até n em x o valor de x_k muda a cada 2^k execuções de Incrementa(x).

Prova:

Exercício.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de pior caso de uma sequência de n execuções de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(n|x|)$.

- É possível fazer melhor? É possível melhorar a análise: o pior caso "não pode acontecer sempre".

A *contagem até n em x* é uma sequência de n execuções de Incrementa(x) com $\overline{x} = 0$ antes da primeira execução.

Lema

Na contagem até n em x o valor de x_k muda a cada 2^k execuções de Incrementa(x).

Prova:

Exercício.

Corolario

Na contagem até n em x, o valor de x_k muda $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$ vezes.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução de pior caso de uma sequência de n execuções de Incrementa(x) é $\mathcal{O}(n|x|)$.

- É possível fazer melhor? É possível melhorar a análise: o pior caso "não pode acontecer sempre".

A *contagem até n em x* é uma sequência de n execuções de Incrementa(x) com $\overline{x} = 0$ antes da primeira execução.

Lema

Na contagem até n em x o valor de x_k muda a cada 2^k execuções de Incrementa(x).

Prova:

Exercício.

Corolario

Na contagem até n em x, o valor de x_k muda $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$ vezes.

Prova

Exercício.

Vamos definir

Vamos definir

$F(n) =$ número de mudanças de valor nas posições de x na contagem até n em x.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Vamos definir

$F(n) =$ número de mudanças de valor nas posições de x na contagem até n em x.

Teorema

$$F(n) < 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Vamos definir

$F(n) =$ número de mudanças de valor nas posições de x na contagem até n em x.

Teorema

$$F(n) < 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então (L.??)

Vamos definir

$F(n) =$ número de mudanças de valor nas posições de x na contagem até n em x.

Teorema

$$F(n) < 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então (L.??)

$$F(n) = \sum_{i=0}^{|x|-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$$

Vamos definir

$F(n) =$ número de mudanças de valor nas posições de x na contagem até n em x.

Teorema

$$F(n) < 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então (L.??)

$$F(n) = \sum_{i=0}^{|x|-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=0}^{|x|-1} \frac{n}{2^i}$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Vamos definir

$F(n) =$ número de mudanças de valor nas posições de x na contagem até n em x.

Teorema

$$F(n) < 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então (L.??)

$$F(n) = \sum_{i=0}^{|x|-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=0}^{|x|-1} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{|x|-1} \frac{1}{2^i}$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Vamos definir

$F(n) =$ número de mudanças de valor nas posições de x na contagem até n em x.

Teorema

$$F(n) < 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então (L.??)

$$F(n) = \sum_{i=0}^{|x|-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=0}^{|x|-1} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{|x|-1} \frac{1}{2^i} < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Vamos definir

$F(n) =$ número de mudanças de valor nas posições de x na contagem até n em x.

Teorema

$$F(n) < 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então (L.??)

$$F(n) = \sum_{i=0}^{|x|-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=0}^{|x|-1} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{|x|-1} \frac{1}{2^i} < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} n$$

Vamos definir

$F(n) =$ número de mudanças de valor nas posições de x na contagem até n em x.

Teorema

$$F(n) < 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então (L.??)

$$F(n) = \sum_{i=0}^{|x|-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=0}^{|x|-1} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{|x|-1} \frac{1}{2^i} < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} n = 2n.$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução da contagem até n em x é $\mathcal{O}(n)$.

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução da contagem até n em x é $\mathcal{O}(n)$.

Prova:

Seja $T_{\text{Incrementa}}(x, n)$ de execução da contagem até n em x. Do Algoritmo Incrementa temos

Corolario

O tempo de execução da contagem até n em x é $\mathcal{O}(n)$.

Prova:

Seja $T_{\text{Incrementa}}(x, n)$ de execução da contagem até n em x. Do Algoritmo Incrementa temos

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(F(n)),$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução da contagem até n em x é $\mathcal{O}(n)$.

Prova:

Seja $T_{\text{Incrementa}}(x, n)$ de execução da contagem até n em x. Do Algoritmo Incrementa temos

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(F(n)),$$

e daí (C.??)

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução da contagem até n em x é $\mathcal{O}(n)$.

Prova:

Seja $T_{\text{Incrementa}}(x, n)$ de execução da contagem até n em x. Do Algoritmo Incrementa temos

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(F(n)),$$

e daí (C.??)

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(n).$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução da contagem até n em x é $\mathcal{O}(n)$.

Prova:

Seja $T_{\text{Incrementa}}(x, n)$ de execução da contagem até n em x. Do Algoritmo Incrementa temos

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(F(n)),$$

e daí (C.??)

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(n).$$

Corolario

O tempo de pior caso amortizado de execução de Incrementa(x) na contagem até n em x é $\Theta(1)$.

Corolario

O tempo de execução da contagem até n em x é $\mathcal{O}(n)$.

Prova:

Seja $T_{\text{Incrementa}}(x, n)$ de execução da contagem até n em x. Do Algoritmo Incrementa temos

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(F(n)),$$

e daí (C.??)

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(n).$$

Corolario

O tempo de pior caso amortizado de execução de Incrementa(x) na contagem até n em x é $\Theta(1)$.

Prova:

Pelo C.?? temos

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução da contagem até n em x é $\mathcal{O}(n)$.

Prova:

Seja $T_{\text{Incrementa}}(x, n)$ de execução da contagem até n em x. Do Algoritmo Incrementa temos

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(F(n)),$$

e daí (C.??)

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(n).$$

Corolario

O tempo de pior caso amortizado de execução de Incrementa(x) na contagem até n em x é $\Theta(1)$.

Prova:

Pelo C.?? temos

$$\frac{T_{\text{Incrementa}}(x, n)}{n} = \frac{\Theta(n)}{n}$$

Análise Amortizada: Incrementador binário

Corolario

O tempo de execução da contagem até n em x é $\mathcal{O}(n)$.

Prova:

Seja $T_{\text{Incrementa}}(x, n)$ de execução da contagem até n em x. Do Algoritmo Incrementa temos

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(F(n)),$$

e daí (C.??)

$$T_{\text{Incrementa}}(x, n) = \Theta(n).$$

Corolario

O tempo de pior caso amortizado de execução de Incrementa(x) na contagem até n em x é $\Theta(1)$.

Prova:

Pelo C.?? temos

$$\frac{T_{\text{Incrementa}}(x, n)}{n} = \frac{\Theta(n)}{n} = \Theta(1).$$