

CI1059 - Introdução à Teoria da Computação

Tópico 03 - Linguagens

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2026/2

Linguagens

Linguagens

Seja Σ um alfabeto.

Linguagens

Seja Σ um alfabeto.

Linguagens

Seja Σ um alfabeto.

Linguagem: um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Linguagens

Seja Σ um alfabeto.

Linguagem: um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos: Dado $\Sigma = \{0, 1\}$, são linguagens sobre Σ :

Linguagens

Seja Σ um alfabeto.

Linguagem: um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos: Dado $\Sigma = \{0, 1\}$, são linguagens sobre Σ :

- ▶ $L = \{\epsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$

Linguagens

Seja Σ um alfabeto.

Linguagem: um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos: Dado $\Sigma = \{0, 1\}$, são linguagens sobre Σ :

- ▶ $L = \{\epsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$

Linguagem das strings da forma $0^n 1^n$, $\forall n \geq 0$.

Linguagens

Seja Σ um alfabeto.

Linguagem: um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos: Dado $\Sigma = \{0, 1\}$, são linguagens sobre Σ :

► $L = \{\epsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$

Linguagem das strings da forma $0^n 1^n$, $\forall n \geq 0$.

► $L = \{\epsilon, 010, 111111\}$

Linguagens

Seja Σ um alfabeto.

Linguagem: um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos: Dado $\Sigma = \{0, 1\}$, são linguagens sobre Σ :

- ▶ $L = \{\epsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$

Linguagem das strings da forma $0^n 1^n$, $\forall n \geq 0$.

- ▶ $L = \{\epsilon, 010, 111111\}$

Linguagem pouco interessante.

Linguagens

Seja Σ um alfabeto.

Linguagem: um conjunto $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos: Dado $\Sigma = \{0, 1\}$, são linguagens sobre Σ :

► $L = \{\epsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$

Linguagem das strings da forma $0^n 1^n$, $\forall n \geq 0$.

► $L = \{\epsilon, 010, 111111\}$

Linguagem pouco interessante.

Em geral lidaremos com linguagens “interessantes”.

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

► $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

► $L_{SQ} = \{0, 1, 100, 1001, 10000, \dots\}$

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

► $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

► $L_{SQ} = \{0, 1, 100, 1001, 10000, \dots\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

- ▶ $L_{SQ} = \{0, 1, 100, 1001, 10000, \dots\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

- ▶ $L_C = \text{"conjunto de todos os programas válidos em linguagem C"}$

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

- ▶ $L_{SQ} = \{0, 1, 100, 1001, 10000, \dots\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

- ▶ $L_C = \text{"conjunto de todos os programas válidos em linguagem C"}$

Notação útil:

- ▶ $N(w)$: número natural representado pela string binária w .

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

- ▶ $L_{SQ} = \{0, 1, 100, 1001, 10000, \dots\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

- ▶ $L_C = \text{"conjunto de todos os programas válidos em linguagem C"}$

Notação útil:

- ▶ $N(w)$: número natural representado pela string binária w .

Exemplo: se $w_1 = 101$ então $N(w_1) = 5$

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

► $L_P = \{10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

► $L_{SQ} = \{0, 1, 100, 1001, 10000, \dots\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

► $L_C = \text{"conjunto de todos os programas válidos em linguagem C"}$

Notação útil:

► $N(w)$: número natural representado pela string binária w .

Exemplo: se $w_1 = 101$ então $N(w_1) = 5$

Exemplo, $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo}\}$

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo}\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

- ▶ $L_{SQ} = \{w : N(w) \text{ é um quadrado perfeito}\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

- ▶ $L_C = \text{“conjunto de todos os programas válidos em linguagem C”}$

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo}\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

- ▶ $L_{SQ} = \{w : N(w) \text{ é um quadrado perfeito}\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

- ▶ $L_C = \text{"conjunto de todos os programas válidos em linguagem C"}$

Observe o seguinte:

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo}\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

- ▶ $L_{SQ} = \{w : N(w) \text{ é um quadrado perfeito}\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

- ▶ $L_C = \text{“conjunto de todos os programas válidos em linguagem C”}$

Observe o seguinte:

- ▶ O problema de **testar primalidade** se resume a testar se $w \in L_P$

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo}\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

- ▶ $L_{SQ} = \{w : N(w) \text{ é um quadrado perfeito}\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

- ▶ $L_C = \text{“conjunto de todos os programas válidos em linguagem C”}$

Observe o seguinte:

- ▶ O problema de **testar primalidade** se resume a testar se $w \in L_P$
- ▶ Note que podemos generalizar isso para qualquer “problema de decisão”

Linguagens

Mais exemplos de linguagens

- ▶ $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo}\}$

Linguagem dos números primos escritos em binário.

- ▶ $L_{SQ} = \{w : N(w) \text{ é um quadrado perfeito}\}$

Linguagem dos quadrados perfeitos.

- ▶ $L_C = \text{“conjunto de todos os programas válidos em linguagem C”}$

Observe o seguinte:

- ▶ O problema de **testar primalidade** se resume a testar se $w \in L_P$
- ▶ Note que podemos generalizar isso para qualquer “problema de decisão”
(problema de testar se um objeto tem certa propriedade)

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A união de L com M é a linguagem $L + M$

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo:

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

A **concatenação de L com M** é a linguagem $L \cdot M$

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

A **concatenação de L com M** é a linguagem $L \cdot M = \{xy : x \in L \text{ e } y \in M\}$.

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

A **concatenação de L com M** é a linguagem $L \cdot M = \{xy : x \in L \text{ e } y \in M\}$.

Notação simplificada: LM

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

A **concatenação de L com M** é a linguagem $L \cdot M = \{xy : x \in L \text{ e } y \in M\}$.

Notação simplificada: LM

Exemplo:

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

A **concatenação de L com M** é a linguagem $L \cdot M = \{xy : x \in L \text{ e } y \in M\}$.

Notação simplificada: LM

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, \dots\}$

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

A **concatenação de L com M** é a linguagem $L \cdot M = \{xy : x \in L \text{ e } y \in M\}$.

Notação simplificada: LM

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, \dots\}$

então $LM = \{a, ax, axx, \dots, aa, aax, aaxx, \dots, aaa, aaax, aaaxx, \dots\}$

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

A **concatenação de L com M** é a linguagem $L \cdot M = \{xy : x \in L \text{ e } y \in M\}$.

Notação simplificada: LM

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, \dots\}$

então $LM = \{a, ax, axx, \dots, aa, aax, aaxx, \dots, aaa, aaax, aaaxx, \dots\}$

$$LM = \{a^i x^k : 1 \leq i \leq 3 \text{ e } k \geq 0\}.$$

Operações sobre linguagens: União, Concatenação e Fecho

Seja L e M linguagens.

A **união de L com M** é a linguagem $L + M = \{x : x \in L \text{ ou } x \in M\}$.

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, b, bb\}$, então $L + M = \{\epsilon, a, aa, aaa, b, bb\}$

A **concatenação de L com M** é a linguagem $L \cdot M = \{xy : x \in L \text{ e } y \in M\}$.

Notação simplificada: LM

Exemplo: Se $L = \{a, aa, aaa\}$ e $M = \{\epsilon, x, xx, xxx, xxxx, \dots\}$

então $LM = \{a, ax, axx, \dots, aa, aax, aaxx, \dots, aaa, aaax, aaaxx, \dots\}$

$$LM = \{a^i x^k : 1 \leq i \leq 3 \text{ e } k \geq 0\}.$$

A operação de **fecho de uma linguagem** será definida adiante

Exercícios

Exercícios

Exercício: Seja $L = \{a, aa, aaa\}$. Qual a linguagem LLL ?

Exercícios

Exercício: Seja $L = \{a, aa, aaa\}$. Qual a linguagem LLL ?

- Primeiramente, $LL = \{aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa\}$

Exercícios

Exercício: Seja $L = \{a, aa, aaa\}$. Qual a linguagem LLL ?

- ▶ Primeiramente, $LL = \{aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa\}$
- ▶ Portanto, $LLL = \{aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, aaaaaa, aaaaaaaa, aaaaaaaaa\}$

Exercícios

Exercício: Seja $L = \{a, aa, aaa\}$. Qual a linguagem LLL ?

- ▶ Primeiramente, $LL = \{aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa\}$
- ▶ Portanto, $LLL = \{aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, aaaaaa, aaaaaaaa, aaaaaaaaa\}$

Exercício: Considere as linguagens $L = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$ e $R = \{0\}$ sobre o alfabeto binário.

Exercícios

Exercício: Seja $L = \{a, aa, aaa\}$. Qual a linguagem LLL ?

- ▶ Primeiramente, $LL = \{aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa\}$
- ▶ Portanto, $LLL = \{aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, aaaaaa, aaaaaaaa, aaaaaaaaa\}$

Exercício: Considere as linguagens $L = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$ e $R = \{0\}$ sobre o alfabeto binário. Qual é a linguagem LR ?

Exercícios

Exercício: Seja $L = \{a, aa, aaa\}$. Qual a linguagem LLL ?

- ▶ Primeiramente, $LL = \{aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa\}$
- ▶ Portanto, $LLL = \{aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, aaaaaa, aaaaaaaa, aaaaaaaaa\}$

Exercício: Considere as linguagens $L = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$ e $R = \{0\}$ sobre o alfabeto binário. Qual é a linguagem LR ?

- ▶ As strings de LR são as strings de L adicionadas de um 0 ao final.

Exercícios

Exercício: Seja $L = \{a, aa, aaa\}$. Qual a linguagem LLL ?

- ▶ Primeiramente, $LL = \{aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa\}$
- ▶ Portanto, $LLL = \{aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, aaaaaa, aaaaaaaa, aaaaaaaaa\}$

Exercício: Considere as linguagens $L = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$ e $R = \{0\}$ sobre o alfabeto binário. Qual é a linguagem LR ?

- ▶ As strings de LR são as strings de L adicionadas de um 0 ao final.
Note: adicionando 0 ao final de um número binário, dobramos o número.

Exercícios

Exercício: Seja $L = \{a, aa, aaa\}$. Qual a linguagem LLL ?

- ▶ Primeiramente, $LL = \{aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa\}$
- ▶ Portanto, $LLL = \{aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, aaaaaa, aaaaaaaa, aaaaaaaaa\}$

Exercício: Considere as linguagens $L = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 3\}$ e $R = \{0\}$ sobre o alfabeto binário. Qual é a linguagem LR ?

- ▶ As strings de LR são as strings de L adicionadas de um 0 ao final.
Note: adicionando 0 ao final de um número binário, dobramos o número.
- ▶ Portanto $LR = \{w : N(w) \text{ é um múltiplo de } 6\}$.

Definição da operação de Fecho

Seja L uma linguagem,

Definição da operação de Fecho

Seja L uma linguagem,

A linguagem L^i é definida como $L^i = \underbrace{LL\dots L}_{i \text{ vezes}}$.

Definição da operação de Fecho

Seja L uma linguagem,

A linguagem L^i é definida como $L^i = \underbrace{LL\dots L}_{i \text{ vezes}}$.

► Por definição $L^0 = \{\epsilon\}$ e $L^1 = L$.

Definição da operação de Fecho

Seja L uma linguagem,

A linguagem L^i é definida como $L^i = \underbrace{LL\dots L}_i$.

► Por definição $L^0 = \{\epsilon\}$ e $L^1 = L$.

O Fecho de L , denotado por L^* ,

Definição da operação de Fecho

Seja L uma linguagem,

A linguagem L^i é definida como $L^i = \underbrace{LL\dots L}_i$.

► Por definição $L^0 = \{\epsilon\}$ e $L^1 = L$.

O **Fecho** de L , denotado por L^* , é a linguagem:

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

Terminologia: A operação de Fecho também é chamada de *Fecho de Kleene*