

Introdução à Teoria da Computação

Lema do Bombeamento (cont.)

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2026/2

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$ não é regular.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$ tal que

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades:

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$ tal que $w = xyz$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$ tal que $w = xyz$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$ tal que $w = xyz$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w **satisfaz as condições do LB**.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$\exists x, y, z$ tal que $w = xyz$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| =$

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Lego $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}|$

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Lego $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$. Logo,

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$. Logo,

$$\begin{aligned}|xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n)\end{aligned}$$

Note:

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note: $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$,

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w **satisfaz as condições do LB**.

Logo $w = xyz$ e as **três propriedades** acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. **Portanto** $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note: $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$,
condição (1) $\Rightarrow (1 + n) > 2$.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w **satisfaz as condições do LB**.

Logo $w = xyz$ e as **três propriedades** acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. **Portanto** $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note: $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$,
condição (1) $\Rightarrow (1 + n) > 2$.

Como $p \geq 2$ e $(1 + n) \geq 2$,

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note: $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$,
condição (1) $\Rightarrow (1 + n) > 2$.

Como $p \geq 2$ e $(1 + n) \geq 2$, $|xy^{p+1}z|$ não é primo.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note: $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$,
condição (1) $\Rightarrow (1 + n) > 2$.

Como $p \geq 2$ e $(1 + n) \geq 2$, $|xy^{p+1}z|$ não é primo.
Isso contradiz $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Exemplo de uso do LB: Primos em unário

Teorema: $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Suponha que L_{uP} é regular. Pelo LB, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que se $w \in L_{uP}$ e $|w| \geq t$

$$\exists x, y, z \text{ tal que } w = xyz$$

respeitando as propriedades: (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq t$ (3) $\forall k \geq 0, xy^kz \in L_{uP}$.

Seja $w = 1^p$, para um primo $p > t$. Note que w satisfaz as condições do LB.

Logo $w = xyz$ e as três propriedades acima valem.

Usando (3), $xy^kz \in L_{uP}$, para qualquer $k \geq 0$. Portanto $xy^{p+1}z \in L_{uP}$.

Seja $|y| = n$. Note que $|xy^{p+1}z| = |xz| + |y^{p+1}| = (p - n) + n \cdot (p + 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} |xy^{p+1}z| &= p - n + np + n \\ &= p + np \\ &= p \cdot (1 + n) \end{aligned}$$

Note: $p \text{ é primo} \Rightarrow p > 2$,
condição (1) $\Rightarrow (1 + n) > 2$.

Como $p \geq 2$ e $(1 + n) \geq 2$, $|xy^{p+1}z|$ não é primo.
Isso contradiz $xy^{p+1}z \in L_{uP}$. Logo L_{uP} não é regular.

Números primos em binário

Teorema: A linguagem $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$ não é regular.

Prova: Slide anterior.

Números primos em binário

Teorema: A linguagem $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$ não é regular.

Prova: Slide anterior.

Também é possível provar o seguinte:

Números primos em binário

Teorema: A linguagem $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Prova: Slide anterior.

Também é possível provar o seguinte:

Teorema: A linguagem $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo}\}$ não é regular.

Números primos em binário

Teorema: A linguagem $L_{uP} = \{1^p : p \text{ é um número primo} \}$ não é regular.

Prova: Slide anterior.

Também é possível provar o seguinte:

Teorema: A linguagem $L_P = \{w : N(w) \text{ é um número primo} \}$ não é regular.

Prova: Material Opcional.