

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 1: Primeiros Conceitos

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

Departamento de Informática da UFPR

2025 - Primeiro semestre

Notação

C : conjunto

k : inteiro

Notação

C : conjunto

k : inteiro

2^C : conjunto dos subconjuntos (ou conjunto das partes) de C

Notação

C : conjunto

k : inteiro

2^C : conjunto dos subconjuntos (ou conjunto das partes) de C

$$2^C := \{S \mid S \subseteq C\}$$

Notação

C : conjunto

k : inteiro

2^C : conjunto dos subconjuntos (ou conjunto das partes) de C

$$2^C := \{S \mid S \subseteq C\}$$

$\binom{C}{k}$: conjunto dos subconjuntos de C com exatamente k elementos

Notação

C : conjunto

k : inteiro

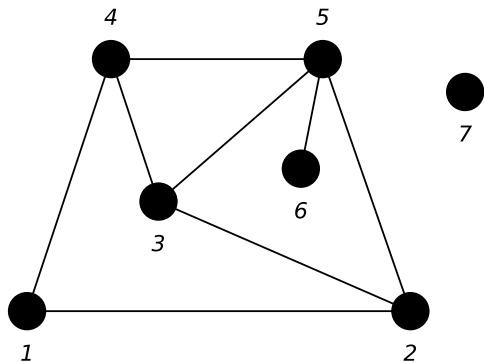
2^C : conjunto dos subconjuntos (ou conjunto das partes) de C

$$2^C := \{S \mid S \subseteq C\}$$

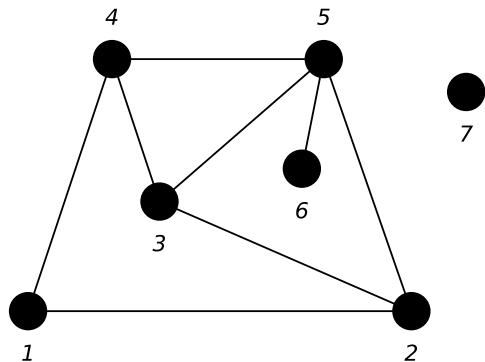
$\binom{C}{k}$: conjunto dos subconjuntos de C com exatamente k elementos

$$\binom{C}{k} := \{S \subseteq C \mid |S| = k\}.$$

Definição de Grafo

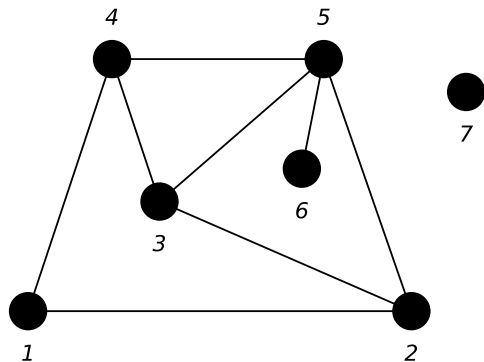


Definição de Grafo



grafo G : par $(V(G), E(G))$

Definição de Grafo

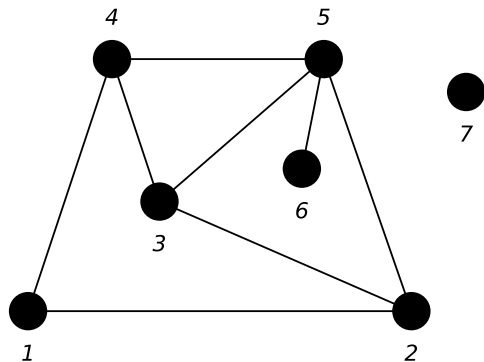


grafo G : par $(V(G), E(G))$

$V(G)$: conjunto finito não vazio

(**vértices**)

Definição de Grafo



grafo G : par $(V(G), E(G))$

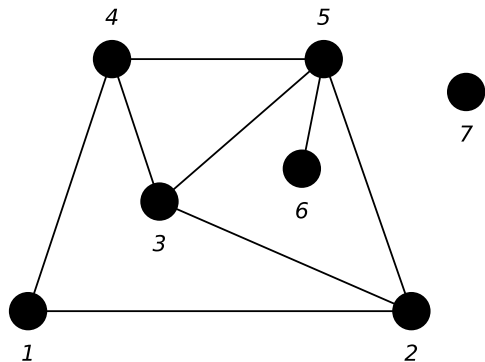
$V(G)$: conjunto finito não vazio

$E(G)$: $\subseteq \binom{V(G)}{2}$

(**vértices**)

(**arestas**)

Definição de Grafo



$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

grafo G : par $(V(G), E(G))$

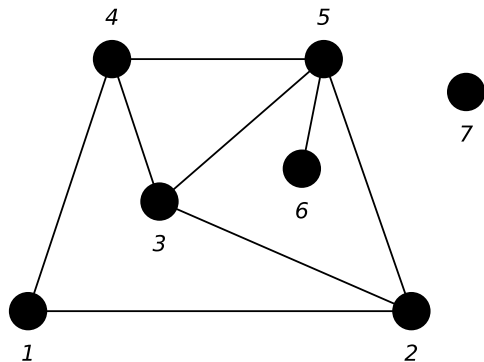
$V(G)$: conjunto finito não vazio

$E(G)$: $\subseteq \binom{V(G)}{2}$

(**vértices**)

(**arestas**)

Definição de Grafo



$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$E(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$$

grafo G : par $(V(G), E(G))$

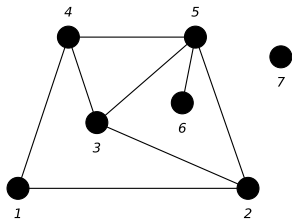
$V(G)$: conjunto finito não vazio

$E(G)$: $\subseteq \binom{V(G)}{2}$

(**vértices**)

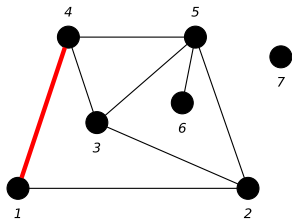
(**arestas**)

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos



G : grafo

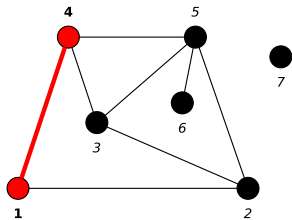
Vértices, arestas, adjacência e vizinhos



G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos

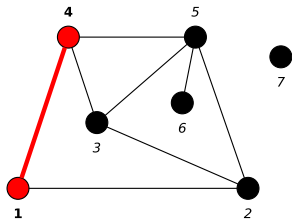


G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

• u e v são as **pontas** da aresta a

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos

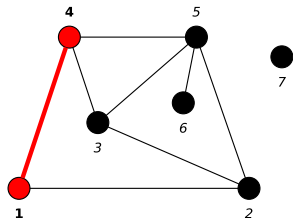


G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

- u e v são as **pontas** da aresta a
- a é **incidente** em u e em v

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos

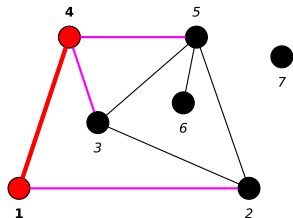


G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

- u e v são as **pontas** da aresta a
- a é **incidente** em u e em v
- os vértices u e v são **vizinhos** (ou **adjacentes**) em G

Vértices, arestas, adjacência e vizinhos



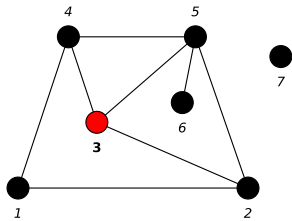
G : grafo

$a = \{u, v\}$: aresta de G

- u e v são as **pontas** da aresta a
- a é **incidente** em u e em v
- os vértices u e v são **vizinhos** (ou **adjacentes**) em G

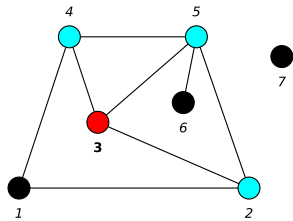
arestas adjacentes: tem ponta em comum

Vizinhança



vizinhança de v em G : conjunto dos vértices que são vizinhos de v em G

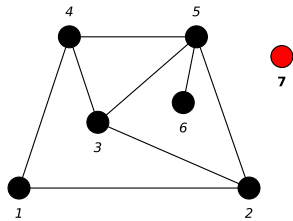
Vizinhança



vizinhança de v em G : conjunto dos vértices que são vizinhos de v em G

$$\Gamma_G(v) := \{u \in V(G) \mid u \text{ é vizinho de } v\}$$

Vizinhança



vizinhança de v em G : conjunto dos vértices que são vizinhos de v em G

$$\Gamma_G(v) := \{u \in V(G) \mid u \text{ é vizinho de } v\}$$

vértice isolado: não tem vizinhos

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



1

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



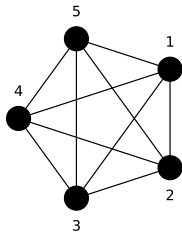
grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.

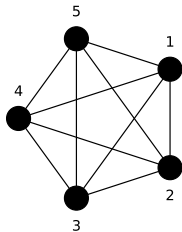


Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.



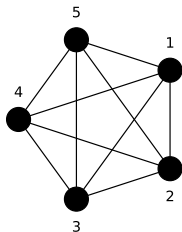
K_n := grafo completo de n vértices

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.



K_n := grafo completo de n vértices

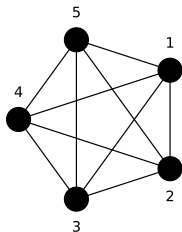
O par $(\emptyset, \emptyset)$ é chamado de *grafo vazio*

Grafo trivial e completo

grafo trivial: um único vértice e sem arestas



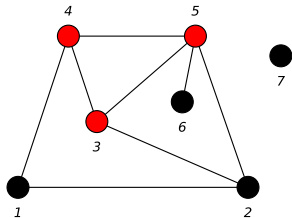
grafo completo: cada vértice é vizinho de todos os outros.



K_n := grafo completo de n vértices

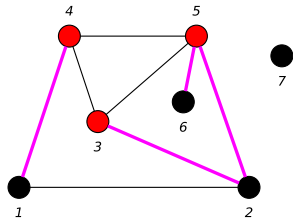
O par $(\emptyset, \emptyset)$ é chamado de *grafo vazio*

Fronteira de um conjunto de vértices



X : conjunto de vértices

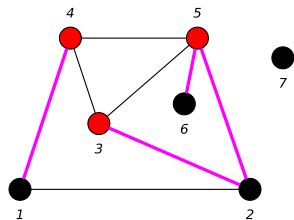
Fronteira de um conjunto de vértices



X : conjunto de vértices

fronteira de X : conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra fora de X

Fronteira de um conjunto de vértices

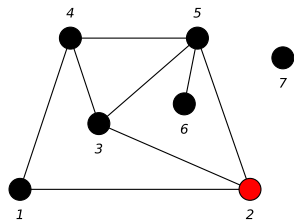


X : conjunto de vértices

fronteira de X : conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra fora de X

$$\partial_G(X) := \{\{x, y\} \in E(G) \mid x \in X \text{ e } y \notin X\}.$$

Fronteira de um conjunto de vértices



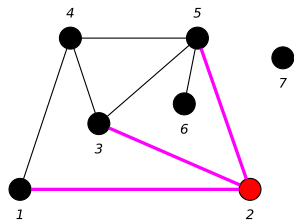
X : conjunto de vértices

fronteira de X : conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra fora de X

$$\partial_G(X) := \{\{x, y\} \in E(G) \mid x \in X \text{ e } y \notin X\}.$$

$$\partial_G(v) := \partial_G(\{v\}).$$

Fronteira de um conjunto de vértices



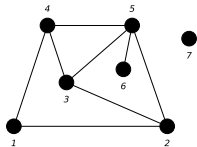
X : conjunto de vértices

fronteira de X : conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra fora de X

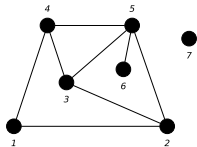
$$\partial_G(X) := \{\{x, y\} \in E(G) \mid x \in X \text{ e } y \notin X\}.$$

$$\partial_G(v) := \partial_G(\{v\}).$$

Complemento de um Grafo

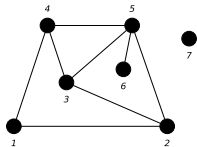


Complemento de um Grafo



O **complemento** de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ tal que:

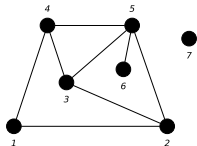
Complemento de um Grafo



O **complemento** de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ tal que:

$$V(\overline{G}) := V(G)$$

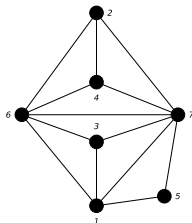
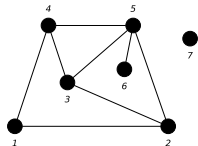
Complemento de um Grafo



O **complemento** de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ tal que:

$$\begin{aligned} V(\overline{G}) &:= V(G), \\ E(\overline{G}) &:= \binom{V(G)}{2} - E(G) \end{aligned}$$

Complemento de um Grafo

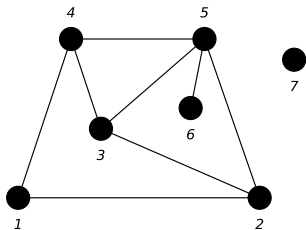


O **complemento** de um grafo G é o grafo $\overline{G}$ tal que:

$$\begin{aligned} V(\overline{G}) &:= V(G), \\ E(\overline{G}) &:= \binom{V(G)}{2} - E(G) \end{aligned}$$

O grafo $\overline{G}$ também é chamado de **grafo complementar** de G

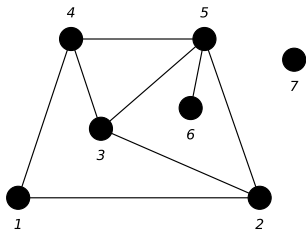
Matriz de Adjacência de um Grafo



$M_G =$



Matriz de Adjacência de um Grafo

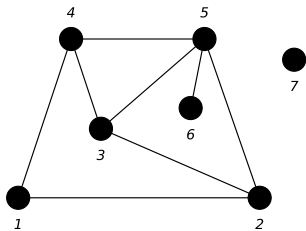


uma linha para cada vértice

$M_G =$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Matriz de Adjacência de um Grafo

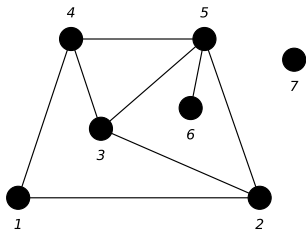


uma linha para cada vértice
uma coluna para cada vértice

$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Matriz de Adjacência de um Grafo

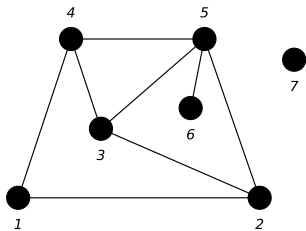


$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

uma linha para cada vértice
uma coluna para cada vértice
na linha u , coluna v tem

Matriz de Adjacência de um Grafo

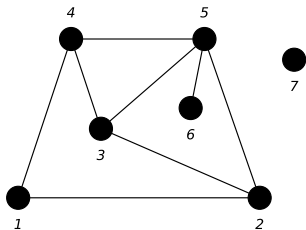


$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

uma linha para cada vértice
uma coluna para cada vértice
na linha u , coluna v tem
1, se u e v são vizinhos

Matriz de Adjacência de um Grafo



$M_G =$

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

uma linha para cada vértice

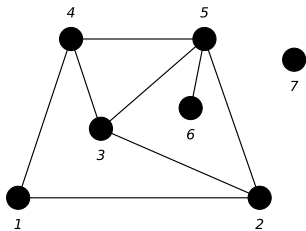
uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

Matriz de Adjacência de um Grafo


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

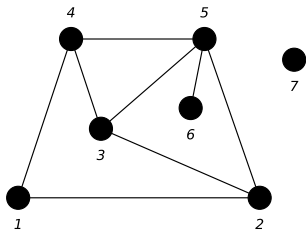
uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

Matriz de Adjacência de um Grafo


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

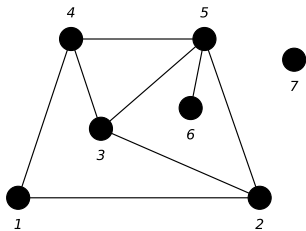
na linha u , coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

Matriz de Adjacência de um Grafo


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

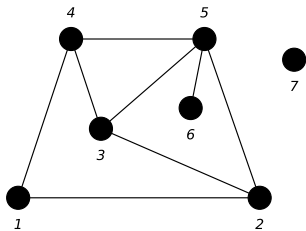
1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

tratada como matriz booleana ou inteira

Matriz de Adjacência de um Grafo


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

uma linha para cada vértice

uma coluna para cada vértice

na linha u , coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M_G[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

tratada como matriz booleana ou inteira
(depende do contexto)

União de Grafos

União de Grafos

G, H : grafos

União de Grafos

G, H : grafos

A **união de G e H**

União de Grafos

G, H : grafos

A **união de G e H** é o grafo $G \cup H$ definido por:

União de Grafos

G, H : grafos

A **união de** G e H é o grafo $G \cup H$ definido por:

$$V(G \cup H) := V(G) \cup V(H),$$

União de Grafos

G, H : grafos

A **união de** G e H é o grafo $G \cup H$ definido por:

$$\begin{aligned} V(G \cup H) &:= V(G) \cup V(H), \\ E(G \cup H) &:= E(G) \cup E(H). \end{aligned}$$

Notação para inserção de aresta

Dado um grafo G

Dados $u, v \in V(G)$

Notação para inserção de aresta

Dado um grafo G

Dados $u, v \in V(G)$

$G + \{u, v\}$:

Notação para inserção de aresta

Dado um grafo G

Dados $u, v \in V(G)$

$G + \{u, v\}$: grafo obtido ao acrescentar a aresta $\{u, v\}$ a G

Notação para inserção de aresta

Dado um grafo G

Dados $u, v \in V(G)$

$G + \{u, v\}$: grafo obtido ao acrescentar a aresta $\{u, v\}$ a G

$$\begin{aligned} V(G + \{u, v\}) &:= V(G), \\ E(G + \{u, v\}) &:= E(G) \cup \{u, v\}. \end{aligned}$$