

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 4: Representação Computacional

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

Departamento de Informática da UFPR

2025

Recapitulando: Notação Assintótica

Recapitulando: Notação Assintótica

1. $g(n) = O(f(n))$

se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que,

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Recapitulando: Notação Assintótica

1. $g(n) = O(f(n))$

se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que,

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

2. $g(n) = \Omega(f(n))$

se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que,

$$|g(n)| \geq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Recapitulando: Notação Assintótica

1. $g(n) = O(f(n))$

se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que,

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

2. $g(n) = \Omega(f(n))$

se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que,

$$|g(n)| \geq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

3. $g(n) = \Theta(f(n))$

se

$$g(n) = O(f(n)) \text{ e } g(n) = \Omega(f(n)).$$

4. Algoritmo **polinomial**:

Recapitulando: Notação Assintótica

1. $g(n) = O(f(n))$

se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que,

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

2. $g(n) = \Omega(f(n))$

se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que,

$$|g(n)| \geq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

3. $g(n) = \Theta(f(n))$

se

$$g(n) = O(f(n)) \text{ e } g(n) = \Omega(f(n)).$$

4. Algoritmo **polinomial**: tem tempo de execução $O(n^k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, onde n é o tamanho da representação da instância.

Representando grafos no computador

descrição de um grafo G requer uma lista explícita de seus vértices e arestas

Representando grafos no computador

descrição de um grafo G requer uma lista explícita de seus vértices e arestas

no caso geral, ignorando tamanho da descrição dos vértices, consome espaço $\Theta(|V(G)| + |E(G)|)$

Representando grafos no computador

descrição de um grafo G requer uma lista explícita de seus vértices e arestas

no caso geral, ignorando tamanho da descrição dos vértices, consome espaço $\Theta(|V(G)| + |E(G)|)$

duas principais representações

Representando grafos no computador

descrição de um grafo G requer uma lista explícita de seus vértices e arestas

no caso geral, ignorando tamanho da descrição dos vértices, consome espaço $\Theta(|V(G)| + |E(G)|)$

duas principais representações

1. matriz de adjacência

Representando grafos no computador

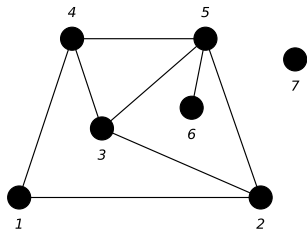
descrição de um grafo G requer uma lista explícita de seus vértices e arestas

no caso geral, ignorando tamanho da descrição dos vértices, consome espaço $\Theta(|V(G)| + |E(G)|)$

duas principais representações

1. matriz de adjacência
2. lista de adjacência

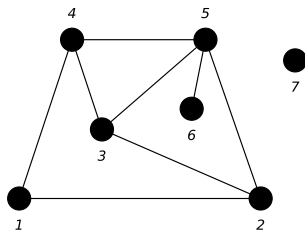
Matriz de adjacência


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

grafo G é representado por sua matriz de adjacência

Matriz de adjacência

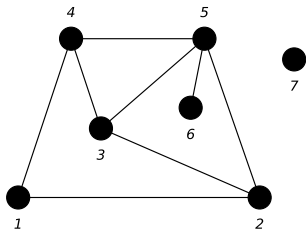

$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

grafo G é representado por sua matriz de adjacência

consome espaço $\Theta(|V(G)|^2)$

Matriz de adjacência


$$M_G =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

grafo G é representado por sua matriz de adjacência

consome espaço $\Theta(|V(G)|^2)$ (mesmo que o grafo não tenha arestas)

Listas de adjacência

grafo G é representado

Listas de adjacência

grafo G é representado

- pelo conjunto $V(G)$

Listas de adjacência

grafo G é representado

- pelo conjunto $V(G)$
- pelos conjuntos das vizinhanças $\Gamma(v)$ de cada vértice v

Listas de adjacência

grafo G é representado

- pelo conjunto $V(G)$
- pelos conjuntos das vizinhanças $\Gamma(v)$ de cada vértice v

$V(G)$:

- vetor

Listas de adjacência

grafo G é representado

- pelo conjunto $V(G)$
- pelos conjuntos das vizinhanças $\Gamma(v)$ de cada vértice v

$V(G)$:

- vetor
- lista encadeada

Listas de adjacência

grafo G é representado

- pelo conjunto $V(G)$
- pelos conjuntos das vizinhanças $\Gamma(v)$ de cada vértice v

$V(G)$:

- vetor
- lista encadeada
- implícito

Listas de adjacência

grafo G é representado

- pelo conjunto $V(G)$
- pelos conjuntos das vizinhanças $\Gamma(v)$ de cada vértice v

$V(G)$:

- vetor
- lista encadeada
- implícito

$\Gamma(v)$: lista encadeada

Listas de adjacência

grafo G é representado

- pelo conjunto $V(G)$
- pelos conjuntos das vizinhanças $\Gamma(v)$ de cada vértice v

$V(G)$:

- vetor
- lista encadeada
- implícito

$\Gamma(v)$: lista encadeada

cada lista tem tamanho $\delta(v)$

Listas de adjacência

grafo G é representado

- pelo conjunto $V(G)$
- pelos conjuntos das vizinhanças $\Gamma(v)$ de cada vértice v

$V(G)$:

- vetor
- lista encadeada
- implícito

$\Gamma(v)$: lista encadeada

cada lista tem tamanho $\delta(v)$

$$\text{total} = \sum_{v \in V(G)} \delta(v) = 2|E(G)| \quad (\text{T. 3})$$

Listas de adjacência

grafo G é representado

- pelo conjunto $V(G)$
- pelos conjuntos das vizinhanças $\Gamma(v)$ de cada vértice v

$V(G)$:

- vetor
- lista encadeada
- implícito

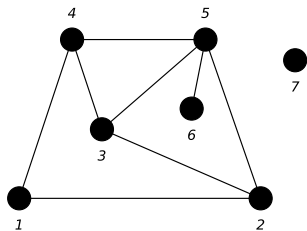
$\Gamma(v)$: lista encadeada

cada lista tem tamanho $\delta(v)$

$$\text{total} = \sum_{v \in V(G)} \delta(v) = 2|E(G)| \quad (\text{T. 3})$$

$$\text{espaço} = \Theta(|V(G)| + |E(G)|)$$

Listas de adjacência



$\Gamma(1)$	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	4	$\nrightarrow$			
$\Gamma(2)$	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	3	$\rightarrow$	5	$\nrightarrow$	
$\Gamma(3)$	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	5	$\nrightarrow$	
$\Gamma(4)$	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	3	$\rightarrow$	5	$\nrightarrow$	
$\Gamma(5)$	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	3	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	6 $\nrightarrow$
$\Gamma(6)$	$\rightarrow$	5	$\nrightarrow$					
$\Gamma(7)$	$\nrightarrow$							

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
--	--------	--------

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço		

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$

u e v são vizinhos?

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\})$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\}) = O(\Delta(G))$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\}) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $\Gamma(v)$		

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\}) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\}) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G))$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$		

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$		

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta		

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta	$\Theta(1)$	

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
acrescentar vértice		

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
acrescentar vértice	?	

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
acrescentar vértice	?	$\Theta(1)$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
acrescentar vértice	?	$\Theta(1)$
remover v		

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
acrescentar vértice	?	$\Theta(1)$
remover v	?	

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
acrescentar vértice	?	$\Theta(1)$
remover v	?	$\Theta(\delta(v))$

Análise Comparativa de Eficiência

	matriz	listas
espaço	$\Theta(V(G) ^2)$	$\Theta(V(G) + E(G))$
u e v são vizinhos?	$\Theta(1)$	$\Theta(\min \{\delta_G(u), \delta_G(v)\} = O(\Delta(G)) = O(V(G)))$
percorrer $\Gamma(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v)) = O(\Delta(G)) = O(V(G))$
percorrer $E(G)$	$ V(G) ^2$	$\Theta(V(G) + E(G))$
computar $\delta(v)$	$\Theta(V(G))$	$\Theta(\delta(v))$ ver (*)
acrescentar aresta	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
acrescentar vértice	?	$\Theta(1)$
remover v	?	$\Theta(\delta(v))$

(*) Se possível, pode-se manter informação e consultar $\Theta(1)$