

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 5: Subgrafos

Renato Carmo

André Guedes

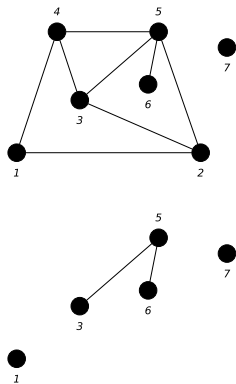
Murilo Silva

Departamento de Informática da UFPR

2025

Definição

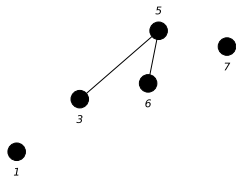
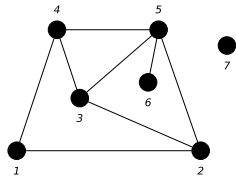
Sejam G e H grafos,



Definição

Sejam G e H grafos,

H é **subgrafo** de G

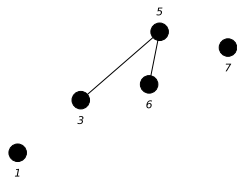
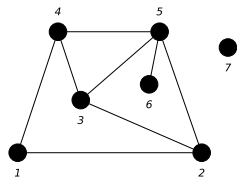


Exemplo de subgrafo

Definição

Sejam G e H grafos,

H é **subgrafo** de $G \equiv G$ é **supergrafo** de H :



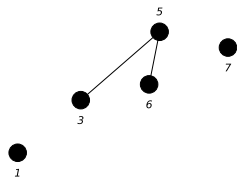
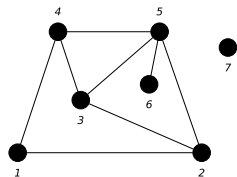
Exemplo de subgrafo

Definição

Sejam G e H grafos,

H é **subgrafo** de $G \equiv G$ é **supergrafo** de H :

$$V(H) \subseteq V(G)$$



Exemplo de subgrafo

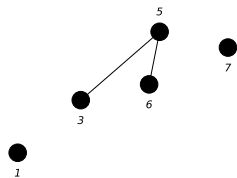
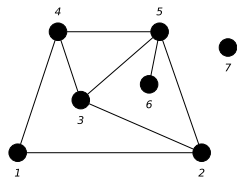
Definição

Sejam G e H grafos,

H é **subgrafo** de $G \equiv G$ é **supergrafo** de H :

$$V(H) \subseteq V(G)$$

$$E(H) \subseteq E(G)$$



Exemplo de subgrafo

Definição

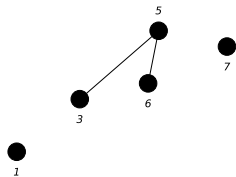
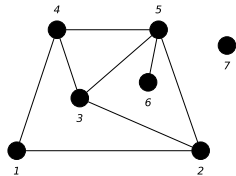
Sejam G e H grafos,

H é **subgrafo** de $G \equiv G$ é **supergrafo** de H :

$$V(H) \subseteq V(G)$$

$$E(H) \subseteq E(G)$$

Notação para subgrafo: $H \subseteq G$



Exemplo de subgrafo

Definição

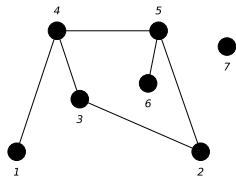
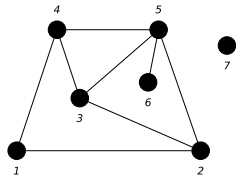
Sejam G e H grafos,

H é **subgrafo** de $G \equiv G$ é **supergrafo** de H :

$$V(H) \subseteq V(G)$$

$$E(H) \subseteq E(G)$$

Notação para subgrafo: $H \subseteq G$



H é **subgrafo gerador** de G se $V(H) = V(G)$

Exemplo de subgrafo gerador

Subgrafo Induzido por Vértices

Seja $X \subseteq V(G)$,

Subgrafo Induzido por Vértices

Seja $X \subseteq V(G)$,

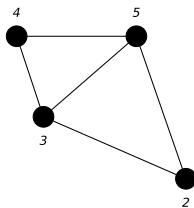
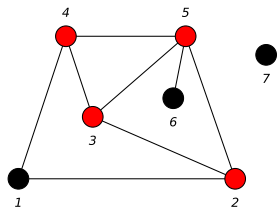
Subgrafo induzido por X

Subgrafo Induzido por Vértices

Seja $X \subseteq V(G)$,

Subgrafo induzido por X : maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X

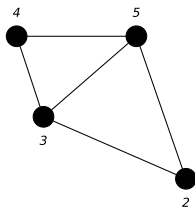
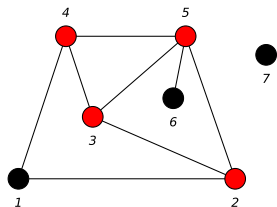
Subgrafo Induzido por Vértices



Seja $X \subseteq V(G)$,

Subgrafo induzido por X : maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X

Subgrafo Induzido por Vértices

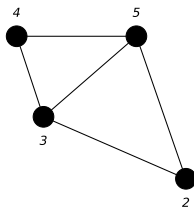
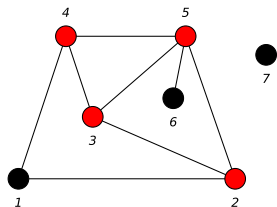


Seja $X \subseteq V(G)$,

Subgrafo induzido por X : maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X

Formalmente, é o grafo $G[X]$

Subgrafo Induzido por Vértices

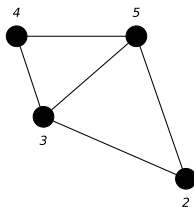
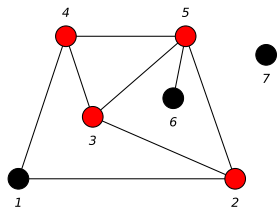


Seja $X \subseteq V(G)$,

Subgrafo induzido por X : maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X

Formalmente, é o grafo $G[X]$, definido por:

Subgrafo Induzido por Vértices



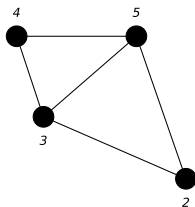
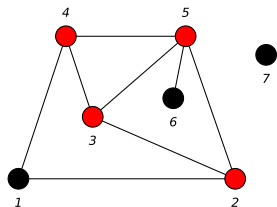
Seja $X \subseteq V(G)$,

Subgrafo induzido por X : maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X

Formalmente, é o grafo $G[X]$, definido por:

$$V(G[X]) := X$$

Subgrafo Induzido por Vértices



Seja $X \subseteq V(G)$,

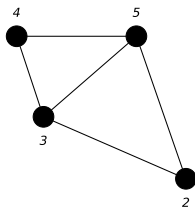
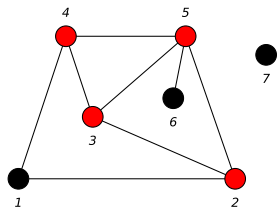
Subgrafo induzido por X : maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X

Formalmente, é o grafo $G[X]$, definido por:

$$V(G[X]) := X$$

$$E(G[X]) := E(G) \cap \binom{X}{2}$$

Subgrafo Induzido por Vértices



Seja $X \subseteq V(G)$,

Subgrafo induzido por X : maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X

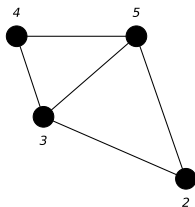
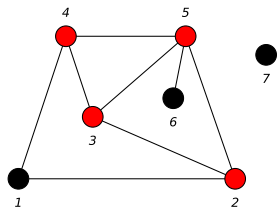
Formalmente, é o grafo $G[X]$, definido por:

$$V(G[X]) := X$$

$$E(G[X]) := E(G) \cap \binom{X}{2}$$

Dados G e H ,

Subgrafo Induzido por Vértices



Seja $X \subseteq V(G)$,

Subgrafo induzido por X : maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X

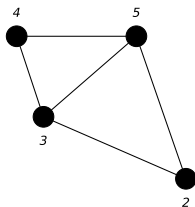
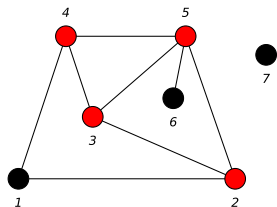
Formalmente, é o grafo $G[X]$, definido por:

$$V(G[X]) := X$$

$$E(G[X]) := E(G) \cap \binom{X}{2}$$

Dados G e H , dizemos que H é **subgrafo induzido de G**

Subgrafo Induzido por Vértices



Seja $X \subseteq V(G)$,

Subgrafo induzido por X : maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X

Formalmente, é o grafo $G[X]$, definido por:

$$V(G[X]) := X$$

$$E(G[X]) := E(G) \cap \binom{X}{2}$$

Dados G e H , dizemos que H é **subgrafo induzido de G** se $\exists X \subseteq V(G)$ tal que $H = G[X]$

Subgrafo Induzido por Arestas

Seja $X \subseteq E(G)$,

Subgrafo Induzido por Arestas

Seja $X \subseteq E(G)$,

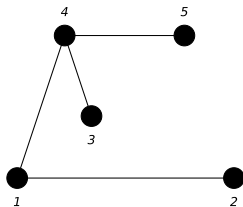
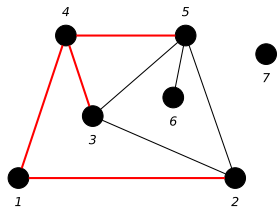
Subgrafo induzido por X :

Subgrafo Induzido por Arestas

Seja $X \subseteq E(G)$,

Subgrafo induzido por X : subgrafo de G cujo conjunto de arestas é X e tal que cada vértice seja ponta de uma aresta de X .

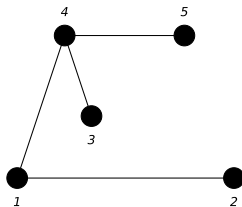
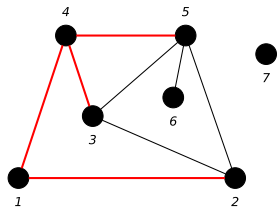
Subgrafo Induzido por Arestas



Seja $X \subseteq E(G)$,

Subgrafo induzido por X : subgrafo de G cujo conjunto de arestas é X e tal que cada vértice seja ponta de uma aresta de X .

Subgrafo Induzido por Arestas

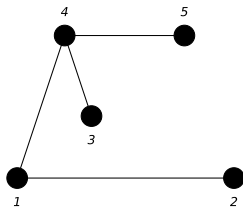
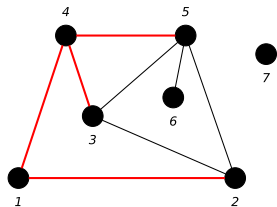


Seja $X \subseteq E(G)$,

Subgrafo induzido por X : subgrafo de G cujo conjunto de arestas é X e tal que cada vértice seja ponta de uma aresta de X .

Formalmente, é o grafo $G[X]$

Subgrafo Induzido por Arestas

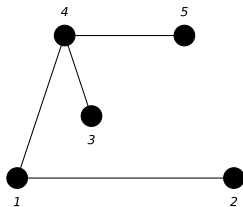
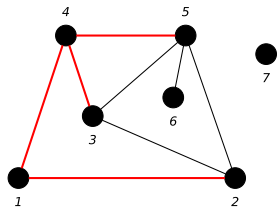


Seja $X \subseteq E(G)$,

Subgrafo induzido por X : subgrafo de G cujo conjunto de arestas é X e tal que cada vértice seja ponta de uma aresta de X .

Formalmente, é o grafo $G[X]$, definido por:

Subgrafo Induzido por Arestas



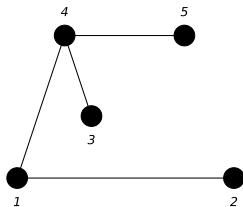
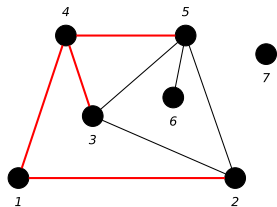
Seja $X \subseteq E(G)$,

Subgrafo induzido por X : subgrafo de G cujo conjunto de arestas é X e tal que cada vértice seja ponta de uma aresta de X .

Formalmente, é o grafo $G[X]$, definido por:

$$E(G[X]) := X$$

Subgrafo Induzido por Arestas



Seja $X \subseteq E(G)$,

Subgrafo induzido por X : subgrafo de G cujo conjunto de arestas é X e tal que cada vértice seja ponta de uma aresta de X .

Formalmente, é o grafo $G[X]$, definido por:

$$E(G[X]) := X$$

$$V(G[X]) := \bigcup_{a \in X} a$$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X$$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X := G[V(G) - X]$$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X := G[V(G) - X]$$

$$G - v$$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X := G[V(G) - X]$$

$$G - v := G - \{v\}$$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X := G[V(G) - X]$$

$$G - v := G - \{v\}$$

Se $X \subseteq E(G)$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X := G[V(G) - X]$$

$$G - v := G - \{v\}$$

Se $X \subseteq E(G)$, então definimos

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X := G[V(G) - X]$$

$$G - v := G - \{v\}$$

Se $X \subseteq E(G)$, então definimos

$$G - X$$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X := G[V(G) - X]$$

$$G - v := G - \{v\}$$

Se $X \subseteq E(G)$, então definimos

$$G - X:$$

$$E(G - X) := E(G) - X$$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X := G[V(G) - X]$$

$$G - v := G - \{v\}$$

Se $X \subseteq E(G)$, então definimos

$$G - X:$$

$$E(G - X) := E(G) - X$$

$$V(G - X) := V(G)$$

Removendo vértices e arestas de um grafo

Se $X \subseteq V(G)$, então definimos

$$G - X := G[V(G) - X]$$

$$G - v := G - \{v\}$$

Se $X \subseteq E(G)$, então definimos

$$G - X:$$

$$E(G - X) := E(G) - X$$

$$V(G - X) := V(G)$$

$$G - a := G - \{a\}$$

Teorema 5:

O grafo H é subgrafo induzido por vértices de G se e somente se H pode ser obtido a partir de G por remoção de vértices, isto é, se e somente se $H = G - X$ para algum $X \subseteq V(G)$.

Demonstração.

Prova: Exercício 17.

