

Algoritmos e Teoria dos Grafos

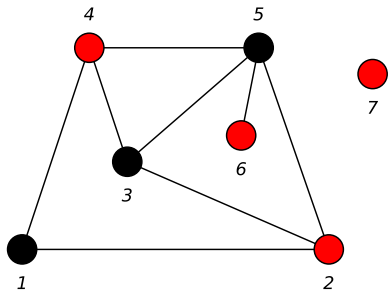
Tópico 6: Conjuntos Independentes e Cliques

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

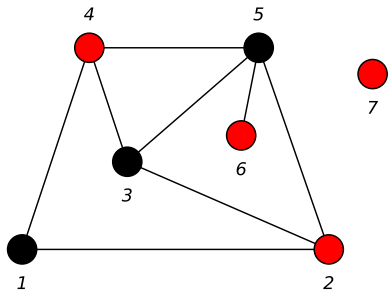
Departamento de Informática da UFPR

2025

Conjuntos Independientes

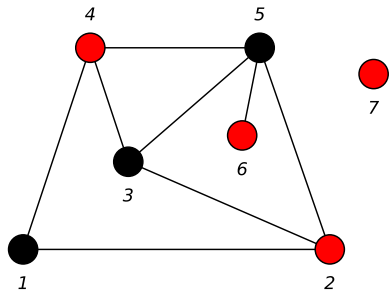


Conjuntos Independientes



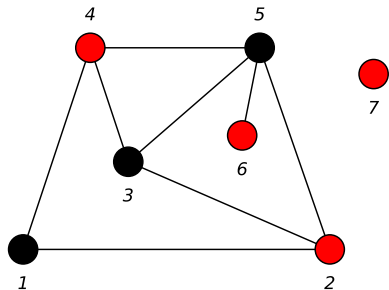
conjunto independente

Conjuntos Independentes



conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

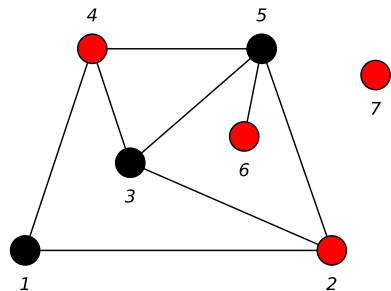
Conjuntos Independentes



conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G

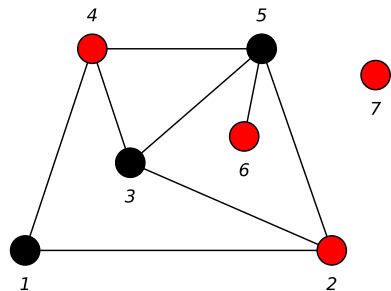
Conjuntos Independentes



conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G : $E(G[X]) = \emptyset$

Conjuntos Independentes

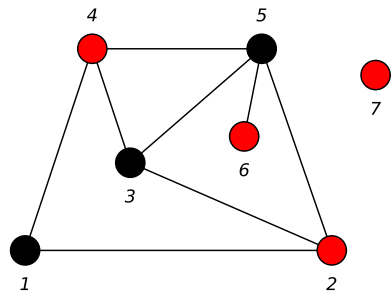


conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G : $E(G[X]) = \emptyset$

$\alpha(G)$

Conjuntos Independentes



conjunto independente: conjunto de vértices que não induz arestas

$X \subseteq V(G)$ é **independente** em G : $E(G[X]) = \emptyset$

$\alpha(G) :=$ tamanho máximo de um conjunto independente em G

Problema do Conjunto Independente (CI)

Instância

Problema do Conjunto Independente (CI)

Instância: um grafo G e um inteiro k

Problema do Conjunto Independente (CI)

Instância: um grafo G e um inteiro k

Resposta

Problema do Conjunto Independente (CI)

Instância: um grafo G e um inteiro k

Resposta: SIM ou NÃO, conforme G tenha ou não um conjunto independente de tamanho k

Problema do Conjunto Independente (CI)

Instância: um grafo G e um inteiro k

Resposta: SIM ou NÃO, conforme G tenha ou não um conjunto independente de tamanho k

Teorema 9 (Karp (1972)) O Problema do Conjunto Independente é $\mathcal{NP}$ -Difícil

Problema do Conjunto Independente (CI)

Instância: um grafo G e um inteiro k

Resposta: SIM ou NÃO, conforme G tenha ou não um conjunto independente de tamanho k

Teorema 9 (Karp (1972)) O Problema do Conjunto Independente é $\mathcal{NP}$ -Difícil

Demonstração.

Exercício 21



Problema do Conjunto Independente Máximo (CIM)

Instância

Problema do Conjunto Independente Máximo (CIM)

Instância: um grafo G

Problema do Conjunto Independente Máximo (CIM)

Instância: um grafo G

Resposta

Problema do Conjunto Independente Máximo (CIM)

Instância: um grafo G

Resposta: $\alpha(G)$

Problema do Conjunto Independente Máximo (CIM)

Instância: um grafo G

Resposta: $\alpha(G)$

Problema do Conjunto Independente Máximo (CIM)

Instância: um grafo G

Resposta: $\alpha(G)$

Corolário 10: Determinar o tamanho máximo de um conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Problema do Conjunto Independente Máximo (CIM)

Instância: um grafo G

Resposta: $\alpha(G)$

Corolário 10: Determinar o tamanho máximo de um conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Demonstração.

Exercício 21



Solução do Exercício 21

Solução do Exercício 21

Prova de que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil**:

Solução do Exercício 21

Prova de que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil**:

Seja $A(G)$ um algoritmo para o problema CIM

Solução do Exercício 21

Prova de que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil**:

Seja $A(G)$ um algoritmo para o problema CIM (i.e., computa $\alpha(G)$)

Solução do Exercício 21

Prova de que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil**:

Seja $A(G)$ um algoritmo para o problema CIM (i.e., computa $\alpha(G)$)

O algoritmo abaixo é uma redução polinomial de CI a CIM:

$CI(G, k)$

Se $A(G) \geq k$
 Devolva **sim**

Devolva **não**

Solução do Exercício 21

Prova de que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil**:

Seja $A(G)$ um algoritmo para o problema CIM (i.e., computa $\alpha(G)$)

O algoritmo abaixo é uma redução polinomial de CI a CIM:

$CI(G, k)$

Se $A(G) \geq k$
 Devolva **sim**

Devolva **não**

1. se $A(G)$ é um algoritmo polinomial, então $CI(G)$ também é
2. $CI(G)$ é um algoritmo para o problema CI

Solução do Exercício 21

Prova de que **determinar o tamanho do maior conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil**:

Seja $A(G)$ um algoritmo para o problema CIM (i.e., computa $\alpha(G)$)

O algoritmo abaixo é uma redução polinomial de CI a CIM:

$CI(G, k)$

Se $A(G) \geq k$
 Devolva **sim**

Devolva **não**

1. se $A(G)$ é um algoritmo polinomial, então $CI(G)$ também é
2. $CI(G)$ é um algoritmo para o problema CI

Problema de encontrar Conjunto Independente Máximo

Instância

Problema de encontrar Conjunto Independente Máximo

Instância: um grafo G

Problema de encontrar Conjunto Independente Máximo

Instância: um grafo G

Resposta

Problema de encontrar Conjunto Independente Máximo

Instância: um grafo G

Resposta: Um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| = \alpha(G)$

Problema de encontrar Conjunto Independente Máximo

Instância: um grafo G

Resposta: Um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| = \alpha(G)$

Corolário 12: Encontrar um conjunto independente de tamanho máximo em um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Problema de encontrar Conjunto Independente Máximo

Instância: um grafo G

Resposta: Um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| = \alpha(G)$

Corolário 12: Encontrar um conjunto independente de tamanho máximo em um grafo é um problema $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Demonstração.

Exercício ??



Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H

Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H

Resposta: H é isomorfo a algum subgrafo induzido de G ?

Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H

Responda: H é isomorfo a algum subgrafo induzido de G ?

Corolário 12: O Problema do Subgrafo Induzido é $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Problema do Subgrafo Induzido

Dados: dois grafos G e H

Resposta: H é isomorfo a algum subgrafo induzido de G ?

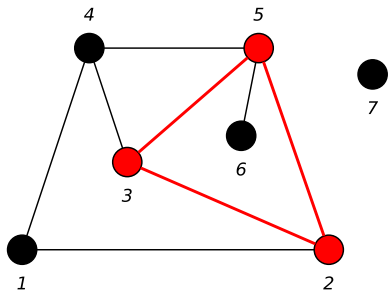
Corolário 12: O Problema do Subgrafo Induzido é $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Demonstração.

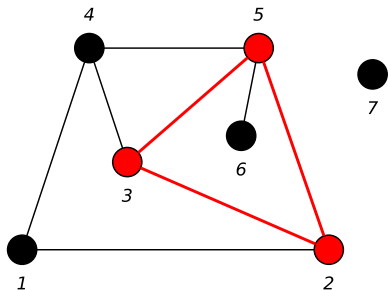
Exercício 22



Cliques

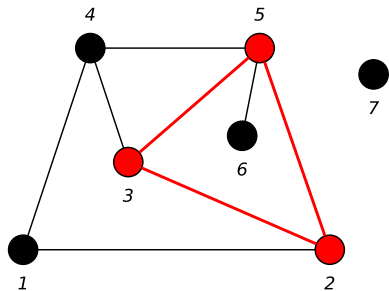


Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

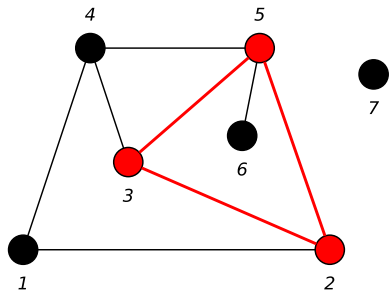
Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G

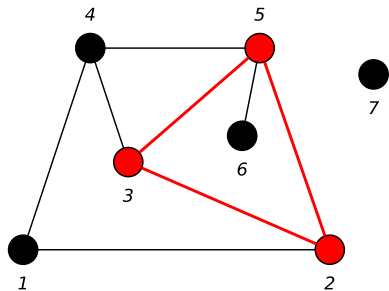
Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G : $G[X]$ é completo

Cliques

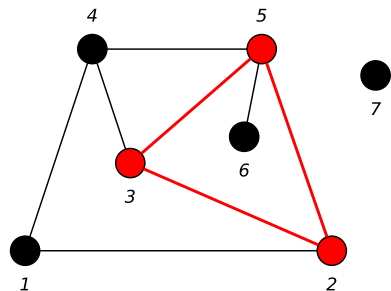


conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G : $G[X]$ é completo

$\omega(G)$

Cliques



conjunto de vértices onde todos são vizinhos entre si

$X \subseteq V(G)$ é uma **clique** em G : $G[X]$ é completo

$\omega(G) :=$ tamanho máximo de uma clique em G

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Resposta: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Resposta: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Problema de encontrar Clique Máxima

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Problema de encontrar Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Problema de encontrar Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $S \subseteq V(G) \mid |S| = \omega(G)$

Teorema 13

Os seguintes problemas são $\mathcal{NP}$ -Difíceis:

Problema da Clique:

Dados: um grafo G e um inteiro k

Responda: G tem clique de tamanho k ?

Problema da Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $\omega(G)$

Problema de encontrar Clique Máxima:

Dado: um grafo G

Obtenha: $S \subseteq V(G) \mid |S| = \omega(G)$

Demonstração.

Exercício 23



Referências

Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In Raymond E. Miller, James W. Thatcher, and Jean D. Bohlinger, editors, **Complexity of Computer Computations: Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department**, pages 85–103, Boston, MA, 1972. Springer US. ISBN 978-1-4684-2001-2. doi: 10.1007/978-1-4684-2001-2_9. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9.