Algoritmos e Teoria dos Grafos

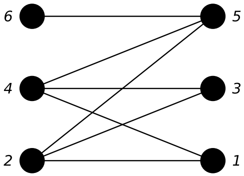
Tópico 7: Grafos Bipartidos

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

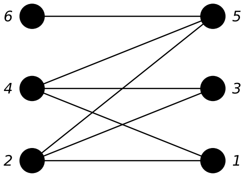
Departamento de Informática da UFPR

2024

Grafos Bipartidos

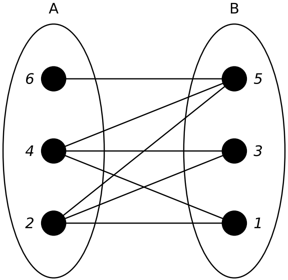


Grafos Bipartidos



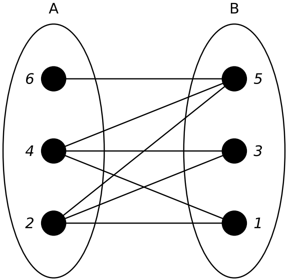
bipartição de G

Grafos Bipartidos



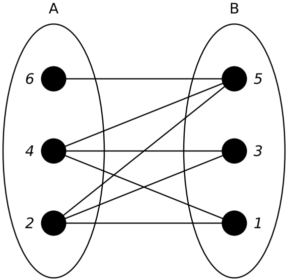
bipartição de G: partição de $V(G)$ em até dois conjuntos independentes

Grafos Bipartidos



bipartição de G: partição de $V(G)$ em até dois conjuntos independentes (**partes**)

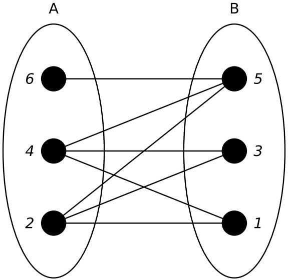
Grafos Bipartidos



bipartição de G: partição de $V(G)$ em até dois conjuntos independentes (**partes**)

grafo bipartido

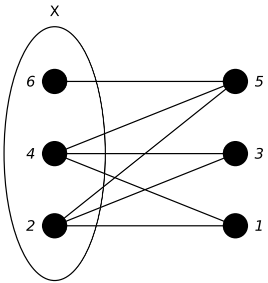
Grafos Bipartidos



bipartição de G: partição de $V(G)$ em até dois conjuntos independentes (**partes**)

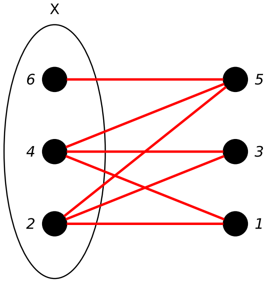
grafo bipartido: grafo que admite bipartição

Lema 14



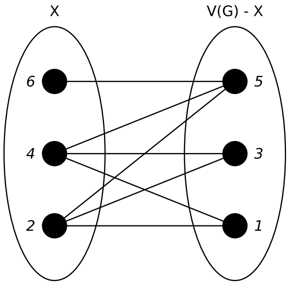
G é bipartido se e somente se tem um conjunto de vértices cuja fronteira engloba todas as arestas

Lema 14



G é bipartido se e somente se tem um conjunto de vértices cuja fronteira engloba todas as arestas, isto é,
$E(G) = \partial_G(X)$, para algum $X \subseteq V(G)$.

Lema 14

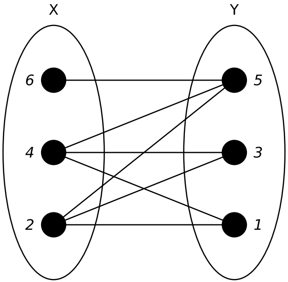


G é bipartido se e somente se tem um conjunto de vértices cuja fronteira engloba todas as arestas, isto é,
$E(G) = \partial_G(X)$, para algum $X \subseteq V(G)$.
Neste caso, $\{X, V(G) - X\}$ é uma bipartição de G

Demonstração.

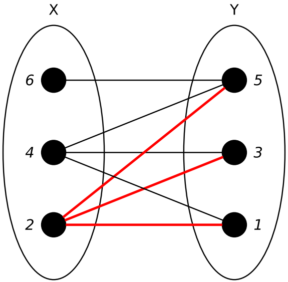
Exercício 29 $\square$

Corolário 15



X, Y: bipartição de G

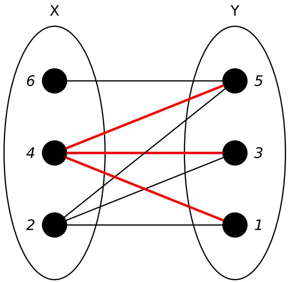
Corolário 15



X, Y: bipartição de G

G tem no máximo $|X||Y|$ arestas

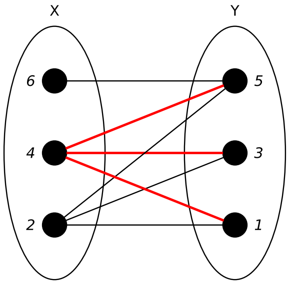
Corolário 15



X, Y: bipartição de G

G tem no máximo $|X||Y|$ arestas

Corolário 15



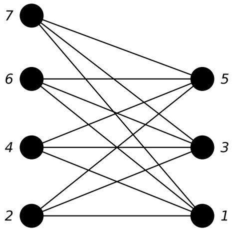
X, Y: bipartição de G

G tem no máximo $|X||Y|$ arestas

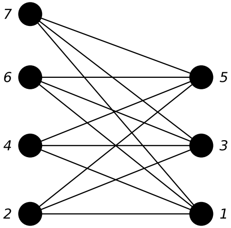
Demonstração.

Exercício 30 $\square$

Grafo Bipartido Completo

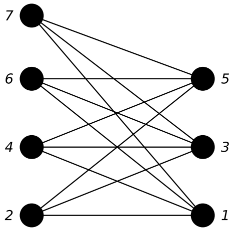


Grafo Bipartido Completo



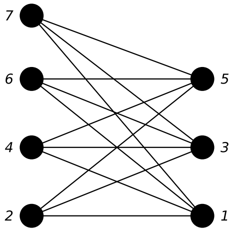
grafo bipartido completo

Grafo Bipartido Completo



grafo bipartido completo: cada vértice é vizinho de todos os vértices da outra parte

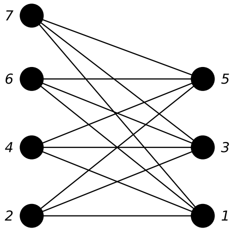
Grafo Bipartido Completo



grafo bipartido completo: cada vértice é vizinho de todos os vértices da outra parte

$K_{p,q}$

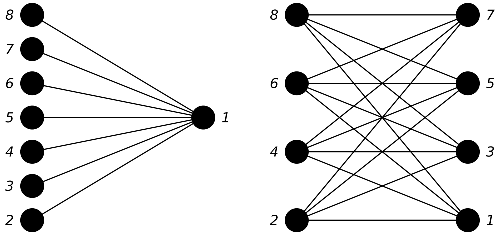
Grafo Bipartido Completo



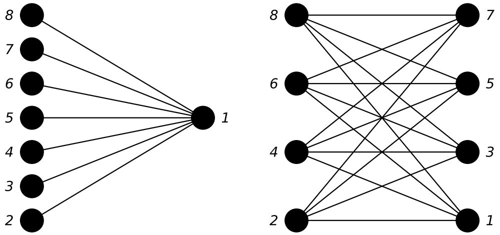
grafo bipartido completo: cada vértice é vizinho de todos os vértices da outra parte

$K_{p,q}$:= grafo bipartido completo cujas partes tem p e q vértices

Corolario 16

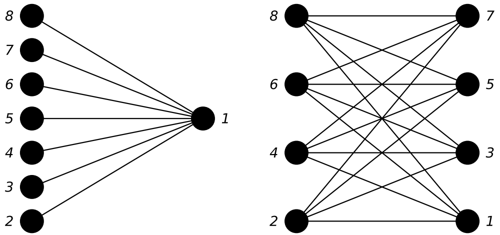


Corolario 16



Um grafo bipartido de n vértices tem no máximo ??? arestas

Corolario 16

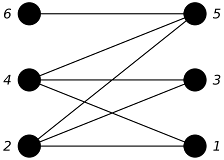


Um grafo bipartido de n vértices tem no máximo $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arestas

Demonstração.

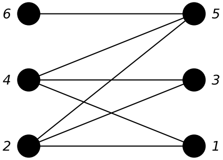
Exercício 31 $\square$

Matriz de bi–adjacência



$M =$

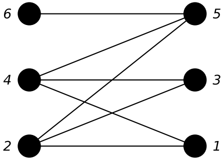
Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|c|} & \\ \hline 1 & \\ 3 & \\ 5 & \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

Matriz de bi–adjacência

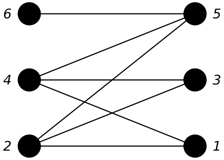


$$M = \begin{array}{c|ccc|} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & & & \\ 3 & & & \\ 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

Matriz de bi–adjacência



$M =$

	2	4	6
1			
3			
5			

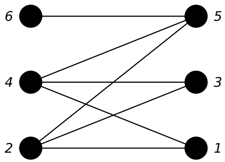
uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

1

Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc|} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & & & \\ 3 & & & \\ 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

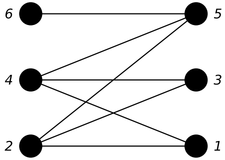
uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc|}
 & 2 & 4 & 6 \\
\hline
1 & & & \\
3 & & & \\
5 & & & \\
\hline
\end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

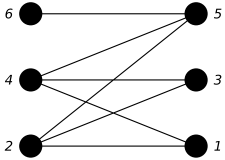
uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0

Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc|} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

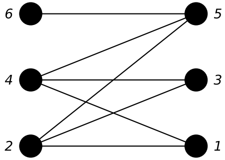
uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc|} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

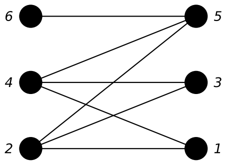
na linha u, coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

Matriz de bi–adjacência



$$M = \begin{array}{c|ccc|} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

uma linha para cada vértice de uma das partes

uma coluna para cada vértice da outra parte

na linha u, coluna v tem

1, se u e v são vizinhos

0, se u e v não são vizinhos

$$M[u, v] = \begin{cases} 0, & \text{se } \{u, v\} \notin E(G), \\ 1, & \text{se } \{u, v\} \in E(G). \end{cases}$$

- qualquer matriz binária é matriz de bi–adjacência de um grafo bipartido