

Algoritmos e Teoria dos Grafos

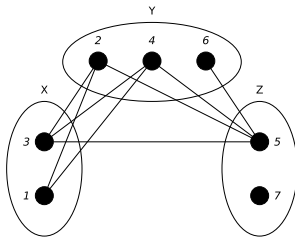
Tópico 09: Grafos Multipartidos e Coloração de Vértices

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

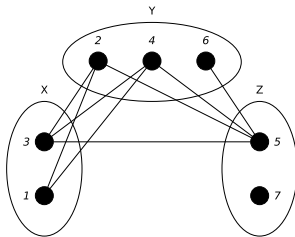
Departamento de Informática da UFPR

2024

Grafos Multipartidos

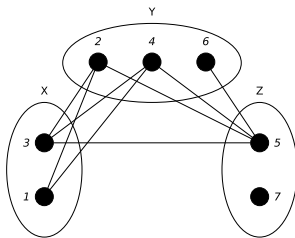


Grafos Multipartidos



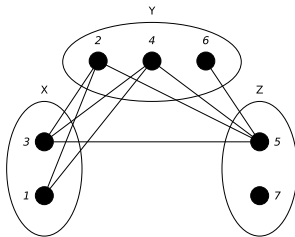
k -partição de G

Grafos Multipartidos



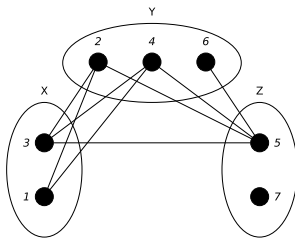
k -partição de G : partição de $V(G)$ em até k conjuntos independentes

Grafos Multipartidos



k -**partição** de G : partição de $V(G)$ em até k conjuntos independentes (**partes**)

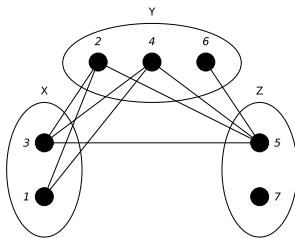
Grafos Multipartidos



k -**partição** de G : partição de $V(G)$ em até k conjuntos independentes (**partes**)

grafo k -bipartido

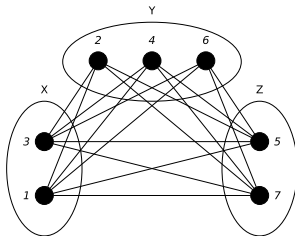
Grafos Multipartidos



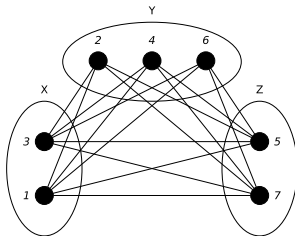
k -partição de G : partição de $V(G)$ em até k conjuntos independentes (**partes**)

grafo k -bipartido: grafo que admite k -partição

Grafo k -partido Completo

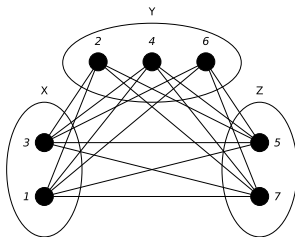


Grafo k -partido Completo



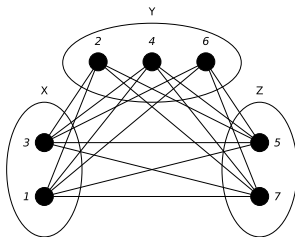
grafo k -partido completo

Grafo k -partido Completo



grafo k -partido completo: cada vértice é vizinho de todos os vértices de todas as outras partes

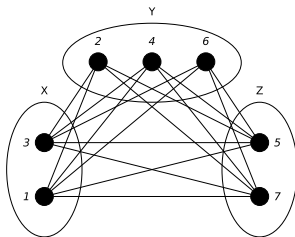
Grafo k -partido Completo



grafo k -partido completo: cada vértice é vizinho de todos os vértices de todas as outras partes

$$K_{n_1, \dots, n_k}$$

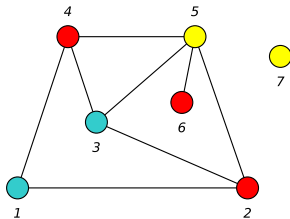
Grafo k -partido Completo



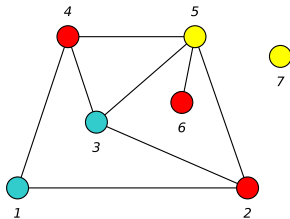
grafo k -partido completo: cada vértice é vizinho de todos os vértices de todas as outras partes

$K_{n_1, \dots, n_k} :=$ grafo k -partido completo cujas partes tem $n_1, \dots, n_k$ vértices

Coloração de Vértices

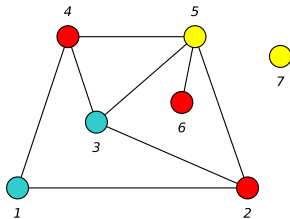


Coloração de Vértices



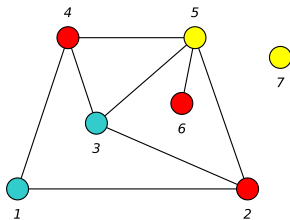
k -coloração de G

Coloração de Vértices



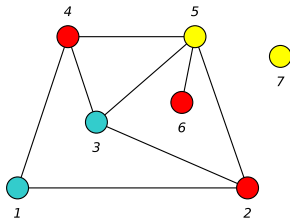
k -**coloração de** G : atribuição de k cores aos vértices

Coloração de Vértices



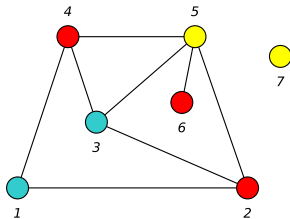
k -**coloração de** G : atribuição de k cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

Coloração de Vértices



k -**coloração de** G : atribuição de k cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes
 $\equiv k$ -partição de $V(G)$ em conjuntos independentes

Coloração de Vértices

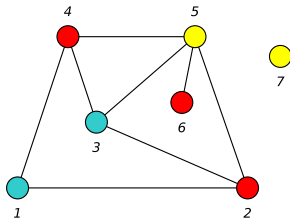


k -**coloração de** G : atribuição de k cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

$\equiv k$ -partição de $V(G)$ em conjuntos independentes

$\equiv k$ -partição de G

Coloração de Vértices



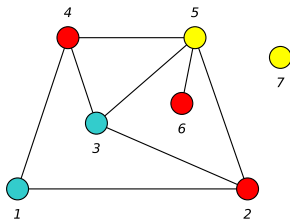
k -**coloração de** G : atribuição de k cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

$\equiv k$ -partição de $V(G)$ em conjuntos independentes

$\equiv k$ -partição de G

parte $\equiv$ cor

Coloração de Vértices



k -coloração de G : atribuição de k cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

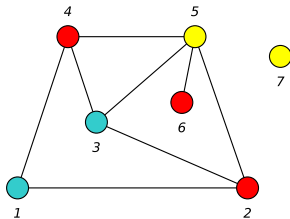
$\equiv k$ -partição de $V(G)$ em conjuntos independentes

$\equiv k$ -partição de G

parte $\equiv$ cor

$\chi(G)$

Coloração de Vértices



k -coloração de G : atribuição de k cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

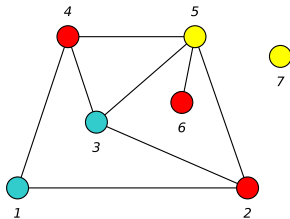
$\equiv k$ -partição de $V(G)$ em conjuntos independentes

$\equiv k$ -partição de G

parte $\equiv$ cor

$\chi(G) :=$ menor número de cores com que é possível colorir G

Coloração de Vértices



k -coloração de G : atribuição de k cores aos vértices de forma que vizinhos tenham cores diferentes

$\equiv k$ -partição de $V(G)$ em conjuntos independentes

$\equiv k$ -partição de G

parte $\equiv$ cor

$\chi(G) :=$ menor número de cores com que é possível colorir G

$\equiv$ **número cromático** de G

Teorema 17: É possível decidir se um grafo dado é 2-colorível em tempo linear.

Teorema 17: É possível decidir se um grafo dado é 2-colorível em tempo linear.

Demonstração.

Prova: Na parte dois da disciplina.

Problemas de Coloração

Teorema 17: É possível decidir se um grafo dado é 2-colorível em tempo linear.

Demonstração.

Prova: Na parte dois da disciplina.



Teorema 18: (Karp (1972)) O problema de decidir se um grafo pode ser 3-colorido é $\mathcal{NP}$ -difícil

Problema da Coloração

Problema da Coloração

Problema da Coloração (col)

Problema da Coloração

Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo G e um inteiro k .

Saída: sim ou não conforme G admita ou não uma k -coloração.

Problema da Coloração

Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo G e um inteiro k .

Saída: sim ou não conforme G admita ou não uma k -coloração.

Teorema 19: O problema de, dados um grafo G e um inteiro k , se G admite uma k -coloração $\mathcal{NP}$ -difícil.

Problema da Coloração

Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo G e um inteiro k .

Saída: sim ou não conforme G admita ou não uma k -coloração.

Teorema 19: O problema de, dados um grafo G e um inteiro k , se G admite uma k -coloração $\mathcal{NP}$ -difícil.

Demonstração.

Exercício 34.



Problema da Coloração

Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo G e um inteiro k .

Saída: sim ou não conforme G admita ou não uma k -coloração.

Teorema 19: O problema de, dados um grafo G e um inteiro k , se G admite uma k -coloração $\mathcal{NP}$ -difícil.

Demonstração.

Exercício 34. □

Teorema 20: O problema de determinar o número cromático de um grafo é $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Problema da Coloração

Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo G e um inteiro k .

Saída: sim ou não conforme G admita ou não uma k -coloração.

Teorema 19: O problema de, dados um grafo G e um inteiro k , se G admite uma k -coloração $\mathcal{NP}$ -difícil.

Demonstração.

Exercício 34.



Teorema 20: O problema de determinar o número cromático de um grafo é $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Problema da Coloração

Problema da Coloração (col)

Entrada: Um grafo G e um inteiro k .

Saída: sim ou não conforme G admita ou não uma k -coloração.

Teorema 19: O problema de, dados um grafo G e um inteiro k , se G admite uma k -coloração $\mathcal{NP}$ -difícil.

Demonstração.

Exercício 34. □

Teorema 20: O problema de determinar o número cromático de um grafo é $\mathcal{NP}$ -Difícil.

Demonstração.

Exercício 35 □

O quebra-cabeça Sudoku é o problema de completar a 9-coloração de um certo grafo de 81 vértices.

Grafos Perfeitos

Teorema 21: Para todo grafo G , $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Teorema 21: Para todo grafo G , $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Grafos Perfeitos

Teorema 21: Para todo grafo G , $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Definição: Um grafo G é **perfeito** se $\omega(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .

Teorema 21: Para todo grafo G , $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Definição: Um grafo G é **perfeito** se $\omega(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .

Demonstração.

Exercício 35



Teorema 21: Para todo grafo G , $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Definição: Um grafo G é **perfeito** se $\omega(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .

Demonstração.

Exercício 35



Teorema 21: Os problemas de coloração, clique máxima e conjunto independente máximo admitem solução polinomial se restritos a grafos perfeitos.

Teorema 21: Para todo grafo G , $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Definição: Um grafo G é **perfeito** se $\omega(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .

Demonstração.

Exercício 35



Teorema 21: Os problemas de coloração, clique máxima e conjunto independente máximo admitem solução polinomial se restritos a grafos perfeitos.

Teorema 23: É possível decidir em tempo polinomial se um grafo é perfeito.

Chudnovsky. Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković 2005

Referências

Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In Raymond E. Miller, James W. Thatcher, and Jean D. Bohlinger, editors, **Complexity of Computer Computations: Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department**, pages 85–103, Boston, MA, 1972. Springer US. ISBN 978-1-4684-2001-2. doi: 10.1007/978-1-4684-2001-2_9. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9.