Algoritmos e Teoria dos Grafos

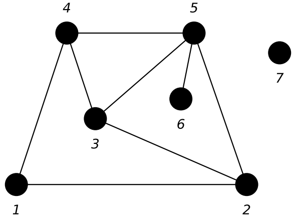
Tópico 14: Ciclos

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

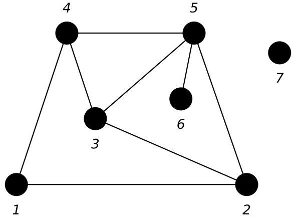
Departamento de Informática da UFPR

2025/1

Definição

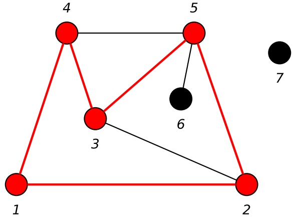


Definição



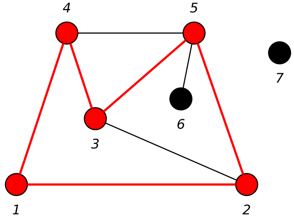
ciclo

Definição



ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

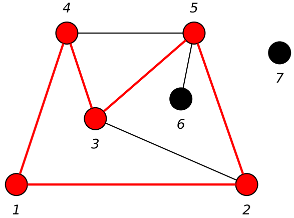
Definição



ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

ciclo

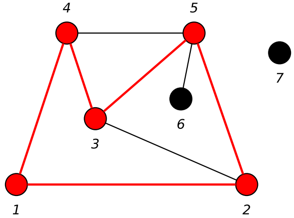
Definição



ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

ciclo: subgrafo induzido por um “passeio fechado de tamanho ... pontas”

Definição

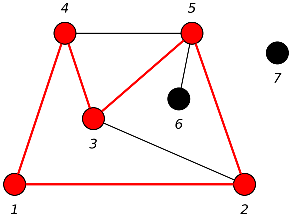


ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

ciclo: subgrafo induzido por um "passeio fechado de tamanho ... pontas"

C_n

Definição



ciclo: passeio fechado de tamanho maior ou igual a 3 com vértices todos distintos, exceto pelas pontas

ciclo: subgrafo induzido por um "passeio fechado de tamanho ... pontas"

C_n: grafo induzido por ciclo de n vértices

Conceitos relacionados

Conceitos relacionados

grafo acíclico

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G: tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G: tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G: $\gamma(G)$

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G: tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G: $\gamma(G)$

G é acíclico

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G: tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G: $\gamma(G)$

G é acíclico: $\gamma(G) = \infty$

Conceitos relacionados

grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G: tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G: $\gamma(G)$

G é acíclico: $\gamma(G) = \infty$

corda no ciclo C

Conceitos relacionados

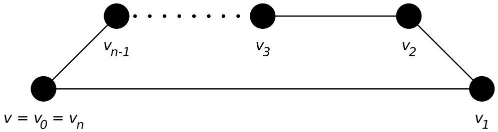
grafo acíclico: grafo sem ciclos

cintura de G: tamanho de um ciclo de tamanho mínimo em G: $\gamma(G)$

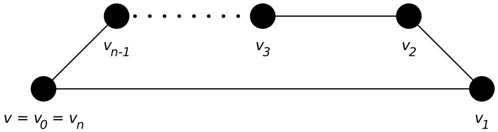
G é acíclico: $\gamma(G) = \infty$

corda no ciclo C: aresta ligando vértices que não são vizinhos no grafo induzido por C

Teorema 34

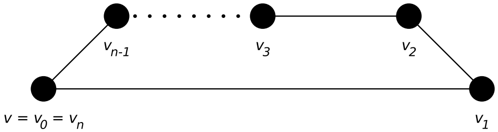


Teorema 34



Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Teorema 34

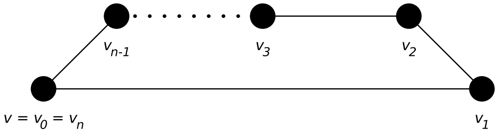


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v = v_0, v_1, \ldots, v_n = v)$

Teorema 34

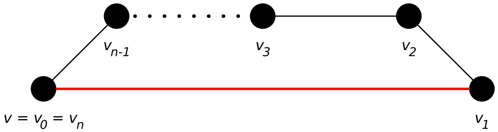


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v = v_0, v_1, \ldots, v_n = v)$: ciclo

Teorema 34

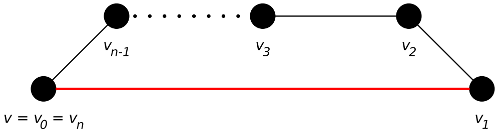


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v = v_0, v_1, \ldots, v_n = v)$: ciclo
2. $(v = v_0, v_1)$

Teorema 34

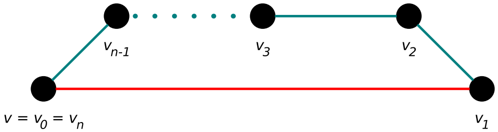


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v = v_0, v_1, \ldots, v_n = v)$: ciclo
2. $(v = v_0, v_1)$: caminho de v a v_1

Teorema 34

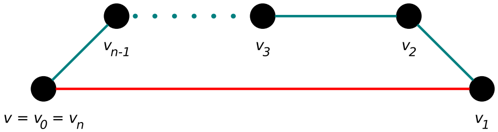


Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v = v_0, v_1, \ldots, v_n = v)$: ciclo
2. $(v = v_0, v_1)$: caminho de v a v_1
3. $(v = v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)$

Teorema 34



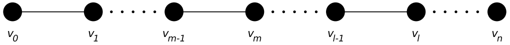
Um grafo tem ciclo se e somente se tem caminhos distintos com as mesmas pontas

Demonstração (⇒).

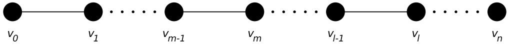
1. $C = (v = v_0, v_1, \ldots, v_n = v)$: ciclo
2. $(v = v_0, v_1)$: caminho de v a v_1
3. $(v = v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)$: outro caminho de v a v_1

□

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

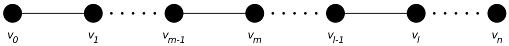


Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)



Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

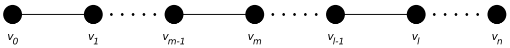


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

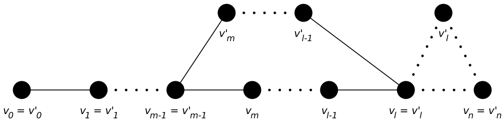


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

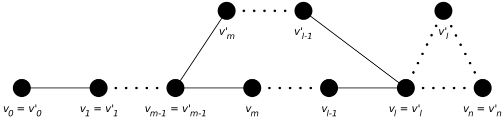


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

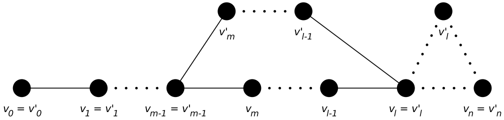


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

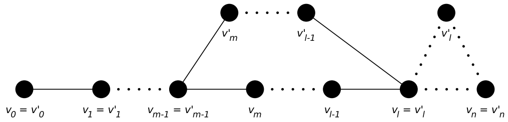


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

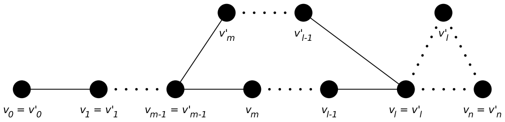


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem

Prova do Teorema 34: $(\Leftarrow)$

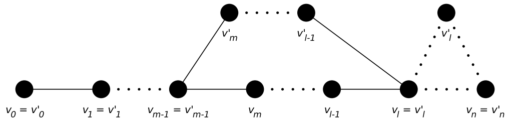


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

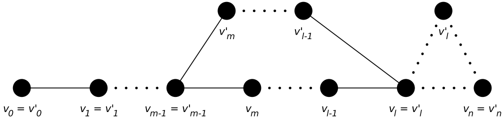


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

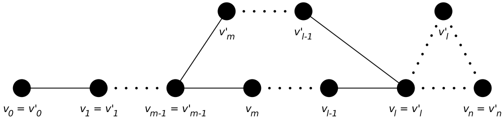


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l: primeiro vértice de P, depois de v_m em $V(P')$

Prova do Teorema 34: $(\Leftarrow)$

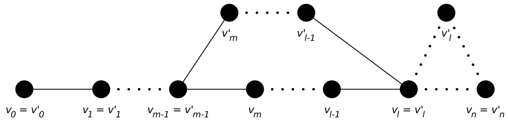


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l: primeiro vértice de P, depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

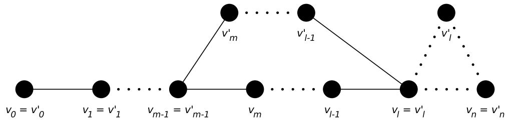


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l: primeiro vértice de P, depois de v_m em $V(P')$: $l := \min\{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l'

Prova do Teorema 34: $(\Leftarrow)$

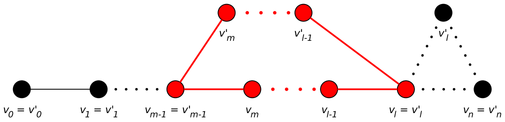


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l: primeiro vértice de P, depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l': índice de v_l em P'

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

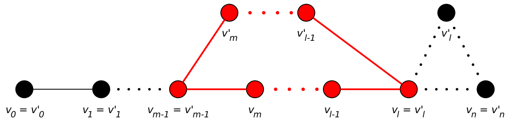


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l: primeiro vértice de P, depois de v_m em $V(P')$: $l := \min\{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l': índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \ldots, v_l$

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

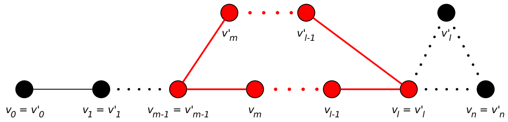


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \dots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \dots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l: primeiro vértice de P, depois de v_m em $V(P')$: $l := \min\{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l': índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \dots, v_l = v'_{l'}$

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

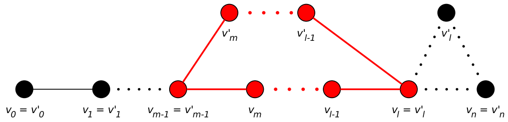


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $\quad m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l: primeiro vértice de P, depois de v_m em $V(P')$: $l := \min \{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l': índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \ldots, v_l = v'_{l'}, v'_{l'-1}, \ldots, v'_m, v'_{m-1}$

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)

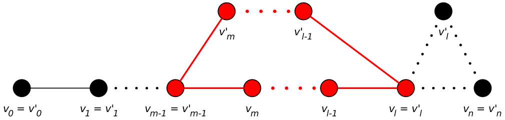


Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l: primeiro vértice de P, depois de v_m em $V(P')$: $l := \min\{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l': índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \ldots, v_l = v'_{l'}, v'_{l'-1}, \ldots, v'_m, v'_{m-1} = v_{m-1})$

Prova do Teorema 34: ($\Leftarrow$)



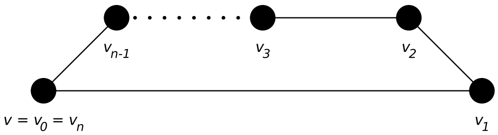
Se G tem caminhos distintos com as mesmas pontas, então G tem ciclo

Demonstração.

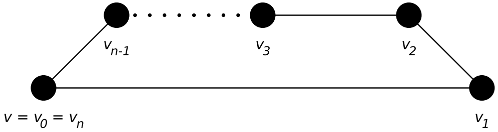
1. $P = (u = v_0, \ldots, v_n = v)$: caminho de u a v
2. $P' = (u = v'_0, \ldots, v'_{n'} = v)$: outro caminho de u a v
3. v_m: primeiro vértice em que P e P' diferem: $\quad m := \min\{i \in [0..n] \mid v_i \neq v'_i\}$
4. v_l: primeiro vértice de P, depois de v_m em $V(P')$: $l := \min\{i \in [m..n] \mid v_i \in V(P')\}$
5. l': índice de v_l em P'
6. $C = (v_{m-1}, v_m, \ldots, v_l = v'_{l'}, v'_{l'-1}, \ldots, v'_m, v'_{m-1} = v_{m-1})$: ciclo

$\square$

Corolário 35

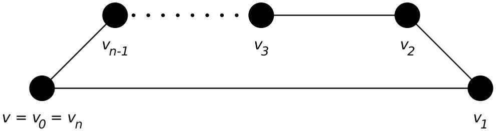


Corolário 35



Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Corolário 35

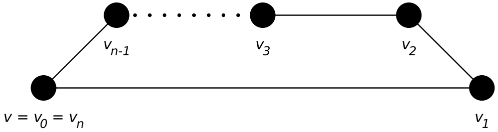


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$

Corolário 35

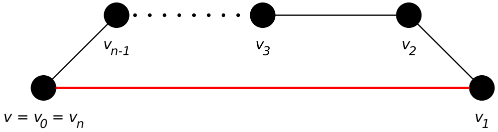


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração (⇒).

1. $C = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$: ciclo

Corolário 35

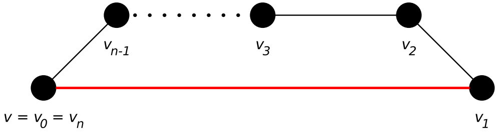


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1)

Corolário 35

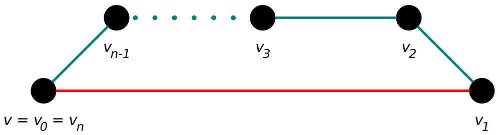


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1): caminho de v_0 a v_1

Corolário 35

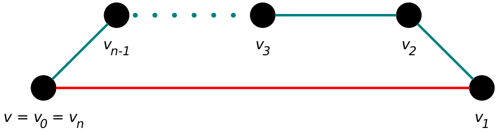


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1): caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \dots, v_1)$

Corolário 35

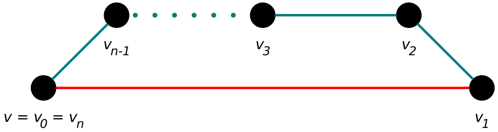


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1): caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \ldots, v_1)$: outro caminho de v_0 a v_1

Corolário 35

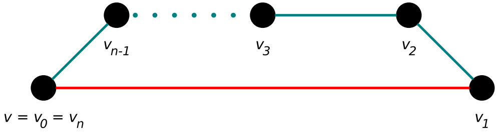


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1): caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \ldots, v_1)$: outro caminho de v_0 a v_1
4. ambos tem tamanho ímpar

Corolário 35

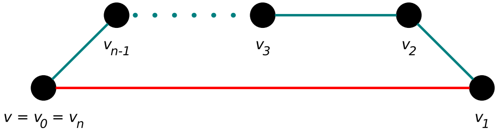


Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração ($\Rightarrow$).

1. $C = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1): caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \ldots, v_1)$: outro caminho de v_0 a v_1
4. ambos tem tamanho ímpar (T. 30)

Corolário 35



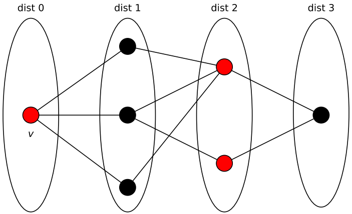
Um grafo é bipartido se e somente se não tem ciclo de tamanho ímpar

Demonstração ($\Rightarrow$).

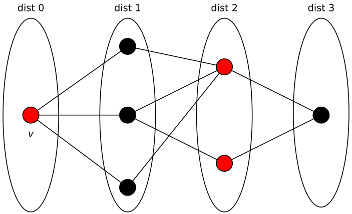
1. $C = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$: ciclo
2. (v_0, v_1): caminho de v_0 a v_1
3. $(v_0, v_{n-1}, \ldots, v_1)$: outro caminho de v_0 a v_1
4. ambos tem tamanho ímpar (T. 30)
5. C tem tamanho par

□

Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)

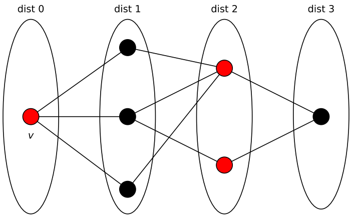


Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)



Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)

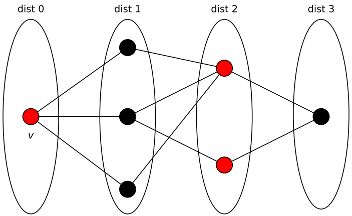


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G

Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)

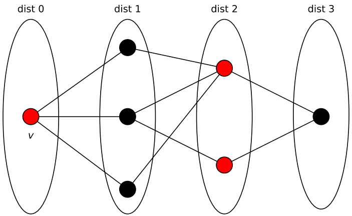


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G: grafo sem ciclo de tamanho ímpar

Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)

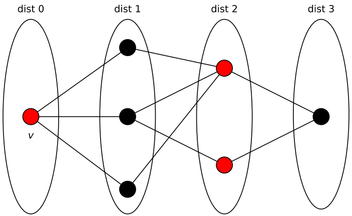


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G: grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo

Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)

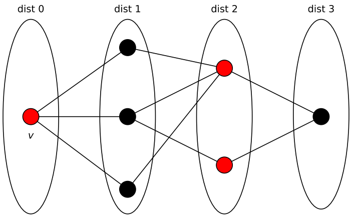


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G: grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo (SPG)

Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)

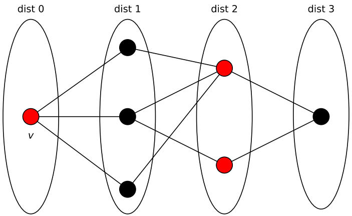


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G: grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo (SPG)
2. v

Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)

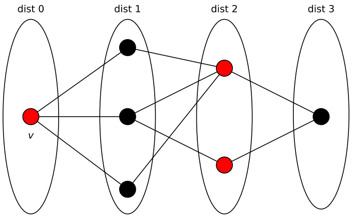


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G: grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo (SPG)
2. v: vértice de G

Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)

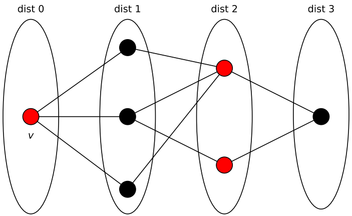


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G: grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo (SPG)
2. v: vértice de G
3. X

Prova do Corolário 35: ($\Leftarrow$)

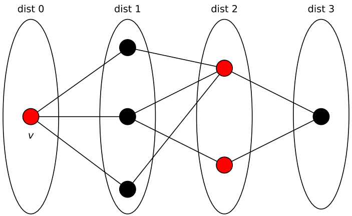


Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G: grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo (SPG)
2. v: vértice de G
3. $X :=$ vértices de G a distância par de v

Prova do Corolário 35: $(\Leftarrow)$



Grafo sem ciclo de tamanho ímpar é bipartido

Demonstração.

1. G: grafo sem ciclo de tamanho ímpar conexo (SPG)
2. v: vértice de G
3. $X :=$ vértices de G a distância par de v
4. $\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

$\square$

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho
ímpar;

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho
ímpar;
v: vértice de G

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho
ímpar;
v: vértice de G

X

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho
ímpar;
v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

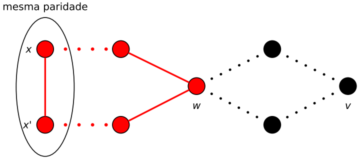
G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G
$X :=$ vértices de G a distância par de v
$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

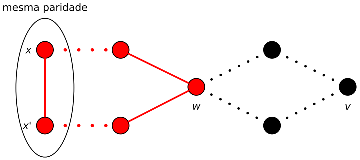
1. $\{x, x'\}$

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X

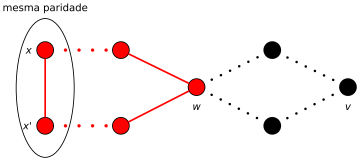
Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

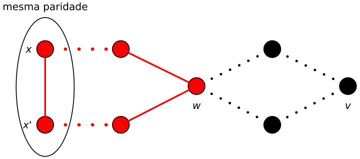
1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P')

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

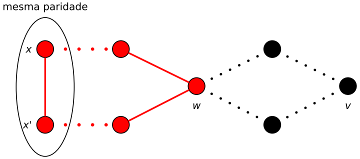


Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G
$X :=$ vértices de G a distância par de v
$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

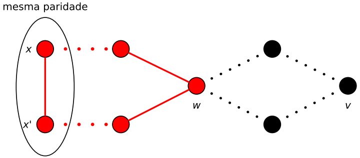


Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G
$X :=$ vértices de G a distância par de v
$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

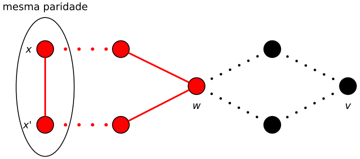


Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $\qquad (x, x' \in X)$

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G
$X :=$ vértices de G a distância par de v
$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

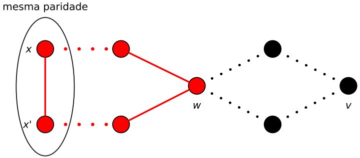


Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $\qquad (x, x' \in X)$
3. w

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G
$X :=$ vértices de G a distância par de v
$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

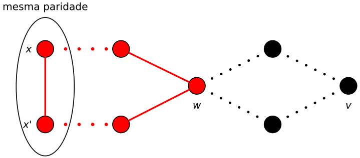
1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $\quad (x, x' \in X)$
3. w: primeiro vértice comum a P e P'

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

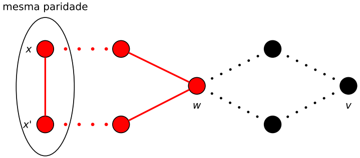


Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w: primeiro vértice comum a P e P' (v é comum a P e P')

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G
$X :=$ vértices de G a distância par de v
$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

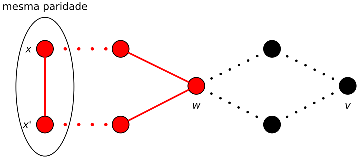
1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w: primeiro vértice comum a P e P' (v é comum a P e P')
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

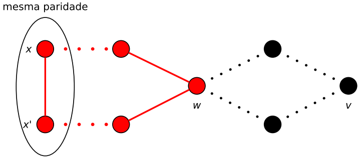
1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $\qquad (x, x' \in X)$
3. w: primeiro vértice comum a P e P' $\qquad (v$ é comum a P e $P')$
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ $\qquad$ (T.33)

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $\quad (x, x' \in X)$
3. w: primeiro vértice comum a P e P' $\quad$ (v é comum a P e P')
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ $\quad$ (T.33)
5. $|xPw|$ e $|wP'x'|$ tem mesma paridade

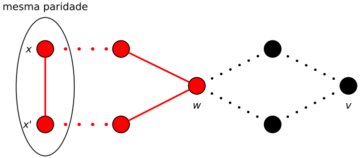
Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G

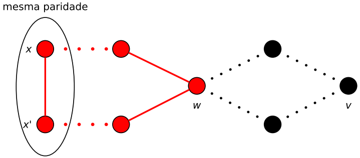


Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $\qquad (x, x' \in X)$
3. w: primeiro vértice comum a P e P' $\qquad$ (v é comum a P e P')
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ $\qquad$ (T.33)
5. $|xPw|$ e $|wP'x'|$ tem mesma paridade
6. C

Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;
v: vértice de G
$X :=$ vértices de G a distância par de v
$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade ($x, x' \in X$)
3. w: primeiro vértice comum a P e P' (v é comum a P e P')
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ (T.33)
5. $|xPw|$ e $|wP'x'|$ tem mesma paridade
6. $C :=$ ciclo $xPw \cdot wP'x' \cdot (x', x)$

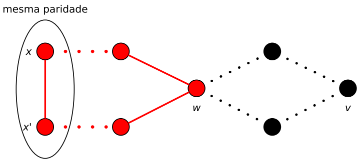
Prova do Corolário 35: (continuação de $\Leftarrow$)

G: grafo conexo sem ciclo de tamanho ímpar;

v: vértice de G

$X :=$ vértices de G a distância par de v

$\{X, V(G) - X\}$ é bipartição de G



Demonstração.

1. $\{x, x'\}$: aresta entre dois vértices em X
2. P (P'): caminho mínimo x (x') a v ambos tem mesma paridade $(x, x' \in X)$
3. w: primeiro vértice comum a P e P' (v é comum a P e P')
4. $|vPw| = |vP'w| = d_G(v, w)$ (T.33)
5. $|xPw|$ e $|wP'x'|$ tem mesma paridade
6. $C :=$ ciclo $xPw \cdot wP'x' \cdot (x', x)$ tem tamanho ímpar

$\square$

Corolário 36

Corolário 36

Todo grafo acíclico é bipartido

O Teorema Forte dos Grafos Perfeitos

Teorema 38: Ciclos ímpares de tamanho maior que 3 e seus complementos não são grafos perfeitos.

O Teorema Forte dos Grafos Perfeitos

Teorema 38: Ciclos ímpares de tamanho maior que 3 e seus complementos não são grafos perfeitos.

Um **Grafo de Berge** é um grafo sem ciclo ímpar induzido cujo complemento também não tem ciclo ímpar induzido.

O Teorema Forte dos Grafos Perfeitos

Teorema 38: Ciclos ímpares de tamanho maior que 3 e seus complementos não são grafos perfeitos.

Um **Grafo de Berge** é um grafo sem ciclo ímpar induzido cujo complemento também não tem ciclo ímpar induzido.

Teorema 39: Um grafo é perfeito se e somente se é Grafo de Berge. Chudnovsky et al. (2006)