

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 15: Árvores

Renato Carmo

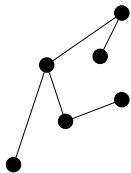
André Guedes

Murilo Silva

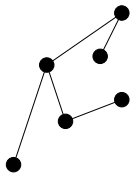
Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Definição

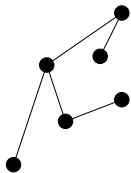


Definição



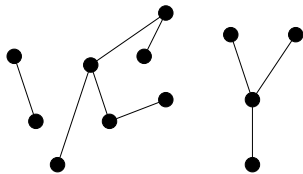
árvore

Definição



árvore: grafo acíclico conexo

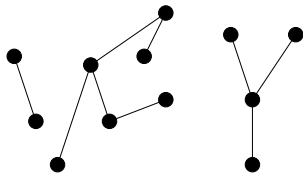
Definição



árvore: grafo acíclico conexo

floresta

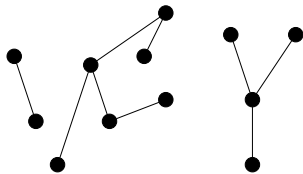
Definição



árvore: grafo acíclico conexo

floresta: grafo onde cada componente é árvore

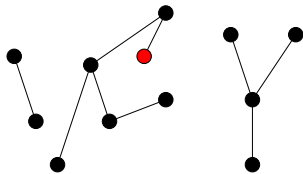
Definição



árvore: grafo acíclico conexo

floresta: grafo onde cada componente é árvore: grafo acíclico

Definição

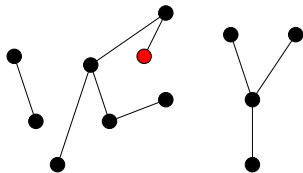


árvore: grafo acíclico conexo

floresta: grafo onde cada componente é árvore: grafo acíclico

folha

Definição

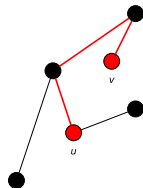


árvore: grafo acíclico conexo

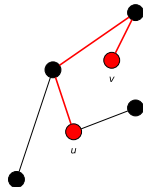
floresta: grafo onde cada componente é árvore: grafo acíclico

folha: vértice de grau 1 em uma floresta

Corolário 44

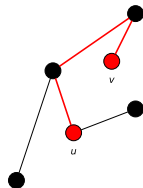


Corolário 44



Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

Corolário 44



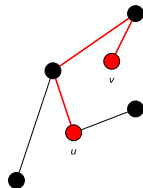
Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

Demonstração.

Imediato a partir do T. 34



Corolário 44



Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

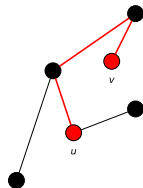
Demonstração.

Imediato a partir do T. 34



uTv

Corolário 44



Um grafo é árvore se e somente se admite um único caminho entre cada par de seus vértices

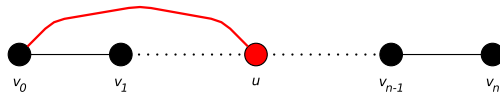
Demonstração.

Imediato a partir do T. 34

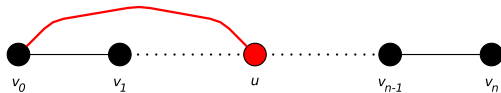


uTv : caminho de u a v na árvore T

Teorema 45



Teorema 45

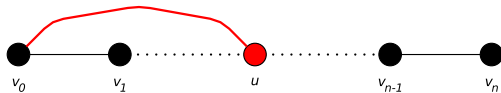


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T

Teorema 45

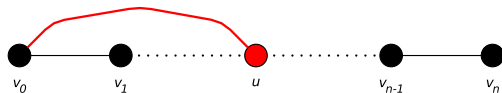


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial

Teorema 45

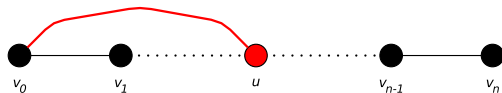


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$

Teorema 45

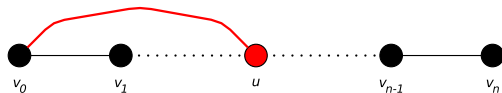


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T

Teorema 45

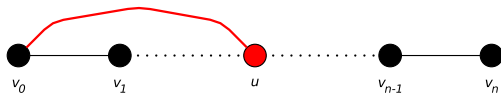


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha

Teorema 45

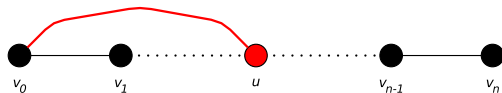


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
 - 3.1 u

Teorema 45

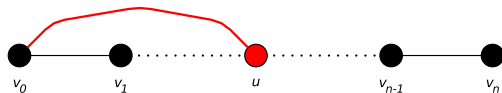


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
 - 3.1 u : vizinho de v_0 em T distinto de v_1

Teorema 45

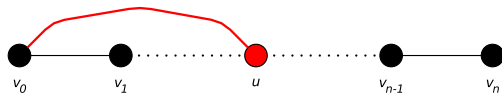


Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
 - 3.1 u : vizinho de v_0 em T distinto de v_1
 - 3.2 u tem que estar em P

Teorema 45



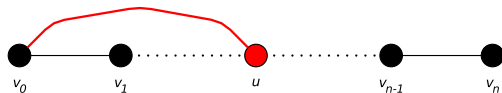
Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
 - 3.1 u : vizinho de v_0 em T distinto de v_1
 - 3.2 u tem que estar em P

(L. 31)

Teorema 45



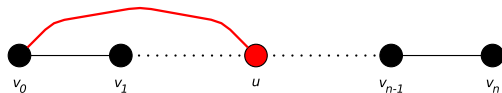
Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
 - 3.1 u : vizinho de v_0 em T distinto de v_1
 - 3.2 u tem que estar em P
 - 3.3 T tem ciclo

(L. 31)

Teorema 45



Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

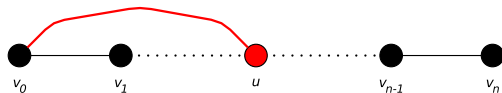
Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
 - 3.1 u : vizinho de v_0 em T distinto de v_1
 - 3.2 u tem que estar em P
 - 3.3 T tem ciclo

(L. 31)

(T. 34)

Teorema 45



Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

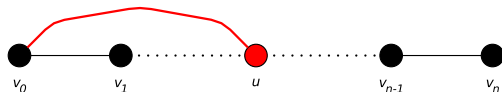
Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
 - 3.1 u : vizinho de v_0 em T distinto de v_1
 - 3.2 u tem que estar em P
 - 3.3 T tem ciclo
 - 3.4 contradiz T ser árvore

(L. 31)

(T. 34)

Teorema 45



Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

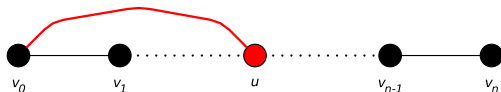
Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
 - 3.1 u : vizinho de v_0 em T distinto de v_1
 - 3.2 u tem que estar em P
 - 3.3 T tem ciclo
 - 3.4 contradiz T ser árvore
4. v_n é folha

(L. 31)

(T. 34)

Teorema 45



Toda árvore não trivial tem (pelo menos) duas folhas.

Demonstração.

1. T : árvore não trivial
2. $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$: caminho maximal em T
3. v_0 é folha
 - 3.1 u : vizinho de v_0 em T distinto de v_1
 - 3.2 u tem que estar em P
 - 3.3 T tem ciclo
 - 3.4 contradiz T ser árvore
4. v_n é folha

(L. 31)

(T. 34)

(mesmo argumento)



Teorema 46

Teorema 46

Toda árvore de n vértices tem $n - 1$ arestas

Teorema 46

Toda árvore de n vértices tem $n - 1$ arestas

indução em n

Base: $n = 1$

Teorema 46

Toda árvore de n vértices tem $n - 1$ arestas

indução em n

Base: $n = 1$

(G é trivial)

Teorema 46

Toda árvore de n vértices tem $n - 1$ arestas

indução em n

Base: $n = 1$

tem $0 = n - 1$ arestas

(G é trivial)

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v

(C. 45)

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v
3. $G - v$ é conexo

(C. 45)

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)
8. $G - v$ tem uma aresta a menos que G

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)
8. $G - v$ tem uma aresta a menos que G (v é folha)

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)
8. $G - v$ tem uma aresta a menos que G (v é folha)
9. G tem $(a - 1) + 1$

Prova do Teorema 46: passo de indução

Hipótese de Indução: se G é árvore com a vértices então G tem $a - 1$ arestas

Passo: se G é árvore com $a + 1$ vértices então G tem a arestas

1. G : árvore com $a + 1$ vértices
2. G tem uma folha v (C. 45)
3. $G - v$ é conexo (G é conexo e v é folha)
4. $G - v$ é acíclico (G é acíclico)
5. $G - v$ é árvore
6. $G - v$ tem a vértices (um a menos que G)
7. $G - v$ tem $a - 1$ arestas (Hipótese de Indução)
8. $G - v$ tem uma aresta a menos que G (v é folha)
9. G tem $(a - 1) + 1 = a$ arestas

Teorema 47

Teorema 47

Todo grafo conexo com n vértices e $n - 1$ arestas é árvore

Teorema 47

Todo grafo conexo com n vértices e $n - 1$ arestas é árvore

Demonstração.

Exercício 83

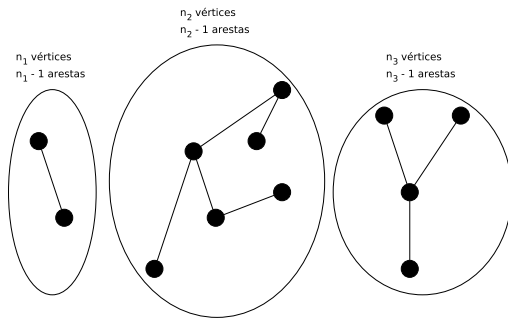


Corolário 48

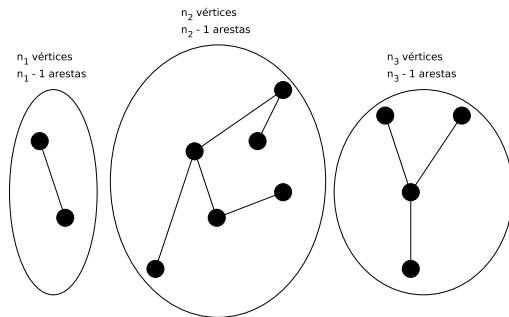
Corolário 48

Um grafo com n vértices é árvore se e somente se é conexo e tem $n - 1$ arestas

Corolário 49



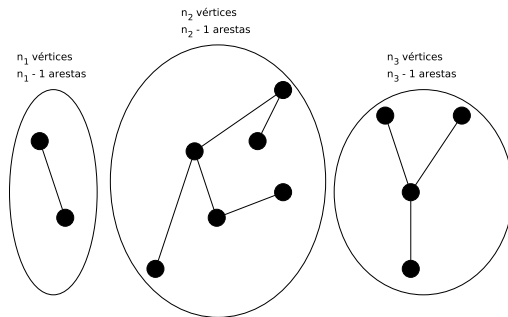
Corolário 49



O grafo G é floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|$$

Corolário 49



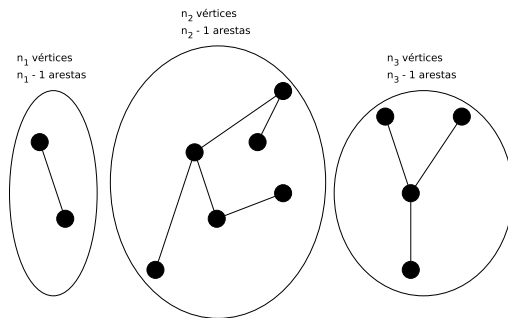
O grafo G é floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|$$

Demonstração.

Exercício 84

Corolário 49



O grafo G é floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|$$

Demonstração.

Exercício 84

(aplicar Corolário 48 a cada componente do grafo)



Teorema 50

Teorema 50

T

Teorema 50

T : árvore

Teorema 50

T : árvore; u, v

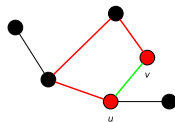
Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



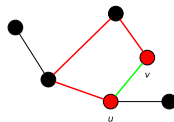
Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

Demonstração.

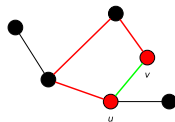
1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$



Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



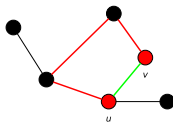
Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



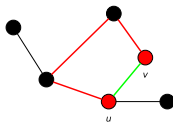
Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C

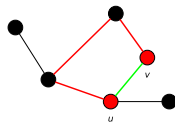
Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo

Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C

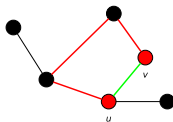


(senão C seria ciclo em T)

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



Demonstração.

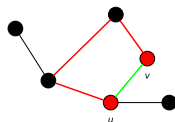
1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo

(senão C seria ciclo em T)

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



Demonstração.

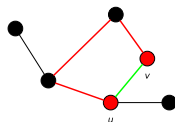
1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$

(senão C seria ciclo em T)

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



Demonstração.

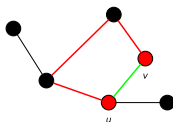
1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T

(senão C seria ciclo em T)

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



Demonstração.

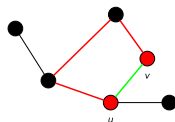
1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T distinto de uTv

(senão C seria ciclo em T)

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



Demonstração.

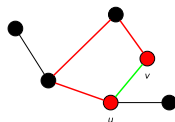
1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T distinto de uTv
7. T tem ciclo

(senão C seria ciclo em T)

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T distinto de uTv
7. T tem ciclo

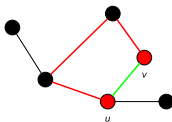
(senão C seria ciclo em T)

(T.34)

Teorema 50

T : árvore; u, v : não vizinhos em T

$T + \{u, v\}$ tem um único ciclo



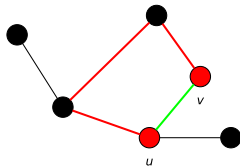
Demonstração.

1. $uTv \cdot (v, u)$ é ciclo em $T + \{u, v\}$
2. C : outro ciclo C em $T + \{u, v\}$
3. $\{u, v\}$ é aresta de C
4. $G[C] - \{u, v\}$ é conexo
5. existe caminho P de u a v em $G[C] - \{u, v\}$
6. P é caminho de u a v em T distinto de uTv
7. T tem ciclo
8. contradiz a hipótese de T ser árvore

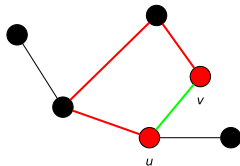
(senão C seria ciclo em T)

(T.34)

Ciclo Fundamental

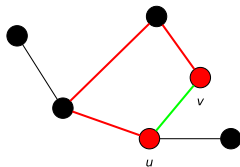


Ciclo Fundamental



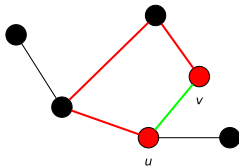
T

Ciclo Fundamental



T : árvore

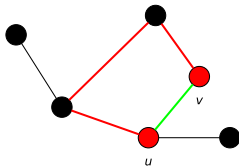
Ciclo Fundamental



T : árvore

u, v

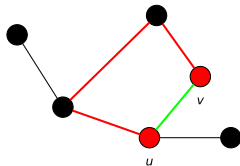
Ciclo Fundamental



T : árvore

u, v : não vizinhos em T

Ciclo Fundamental

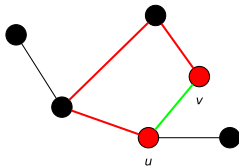


T : árvore

u, v : não vizinhos em T

ciclo fundamental de $\{u, v\}$ com relação a T

Ciclo Fundamental

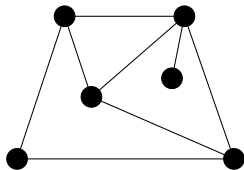


T : árvore

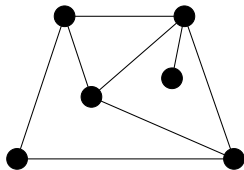
u, v : não vizinhos em T

ciclo fundamental de $\{u, v\}$ com relação a T : único ciclo em $T + \{u, v\}$

Árvores e Florestas Geradoras

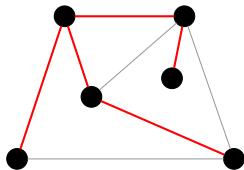


Árvores e Florestas Geradoras



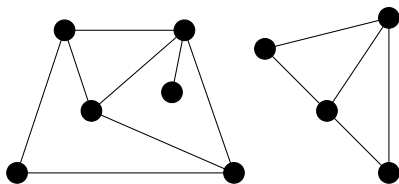
árvore geradora de G

Árvores e Florestas Geradoras



árvore geradora de G : subgrafo gerador de G que é árvore

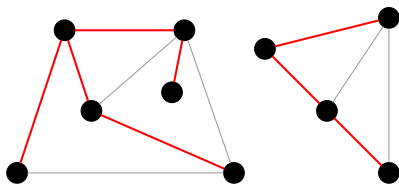
Árvores e Florestas Geradoras



árvore geradora de G : subgrafo gerador de G que é árvore

floresta geradora de G

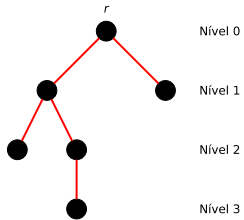
Árvores e Florestas Geradoras



árvore geradora de G : subgrafo gerador de G que é árvore

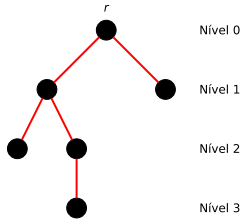
floresta geradora de G : subgrafo gerador de G que é floresta

Árvore Enraizada



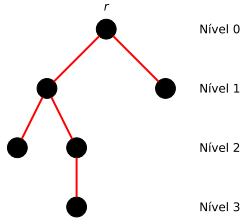
árvore enraizada

Árvore Enraizada



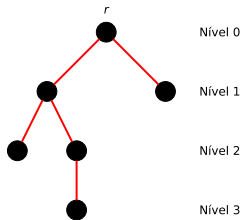
árvore enraizada: par (T, r)

Árvore Enraizada



árvore enraizada: par (T, r)
 T

Árvore Enraizada

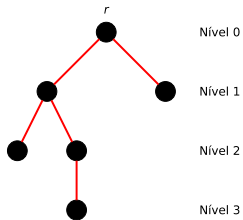


árvore enraizada: par (T, r)

T : árvore

r

Árvore Enraizada

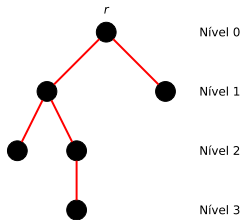


árvore enraizada: par (T, r)

T : árvore

r : vértice de T

Árvore Enraizada

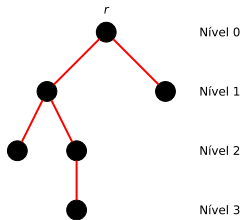


árvore enraizada: par (T, r)

T : árvore

r : vértice de T : **raíz**

Árvore Enraizada



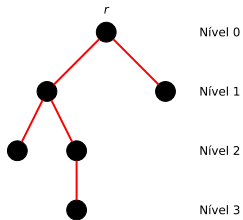
árvore enraizada: par (T, r)

T : árvore

r : vértice de T : **raíz**

nível de v em (T, r)

Árvore Enraizada



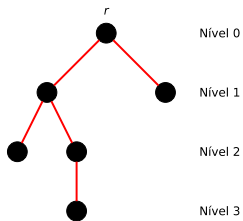
árvore enraizada: par (T, r)

T : árvore

r : vértice de T : **raíz**

nível de v em (T, r) : distância de v a r em T

Árvore Enraizada



árvore enraizada: par (T, r)

T : árvore

r : vértice de T : **raíz**

nível de v em (T, r) : distância de v a r em T

$$L_{T,r}(v) := d_T(r, v)$$