

Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 17: Conectividade por Arestas

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

Departamento de Informática da UFPR

2025/1

Corte de Arestas

Corte de Arestas

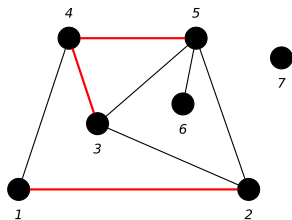
- Ideia: conjunto K de arestas tal que a remoção desconecta grafo G

Corte de Arestas

- Ideia: conjunto K de arestas tal que a remoção desconecta grafo G
- E se o grafo já for desconexo?

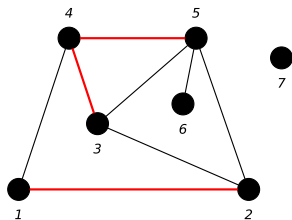
Corte de Arestas

- Ideia: conjunto K de arestas tal que a remoção desconecta grafo G
- E se o grafo já for desconexo?



Corte de Arestas

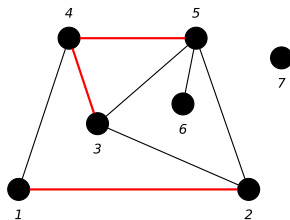
- Ideia: conjunto K de arestas tal que a remoção desconecta grafo G
- E se o grafo já for desconexo?



- Mais precisamente: remoção aumenta número de componentes

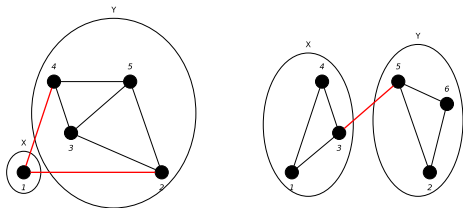
Corte de Arestas

- Ideia: conjunto K de arestas tal que a remoção desconecta grafo G
- E se o grafo já for desconexo?

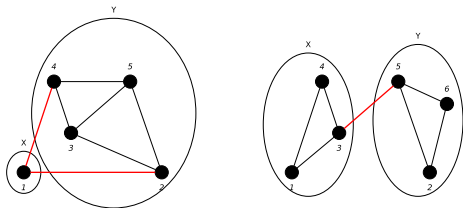


- Mais precisamente: remoção aumenta número de componentes
- O conjunto $K \subseteq E(G)$ é um *corte* se $|\mathcal{C}(G - K)| > |\mathcal{C}(G)|$

Conexidade por Arestas

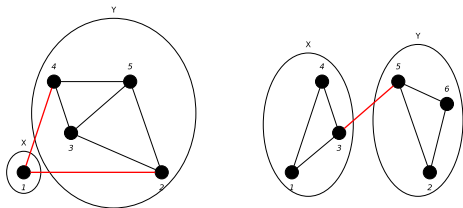


Conexidade por Arestas



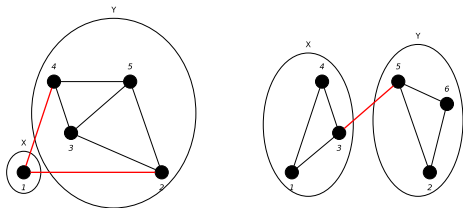
Seja G um grafo conexo não trivial e não completo

Conexidade por Arestas



Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

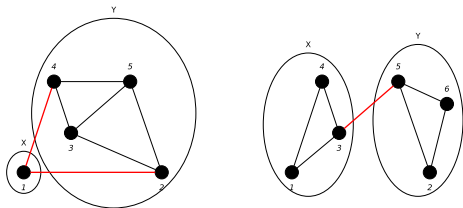
Conexidade por Arestas



Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$?

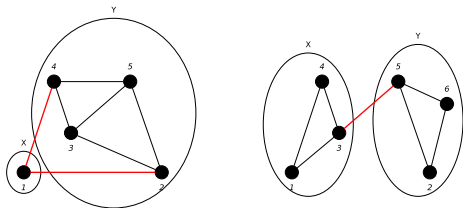
Conexidade por Arestas



Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

Conexidade por Arestas

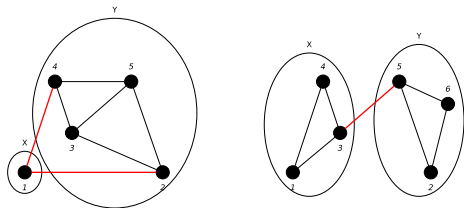


Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

G é k -aresta conexo

Conexidade por Arestas

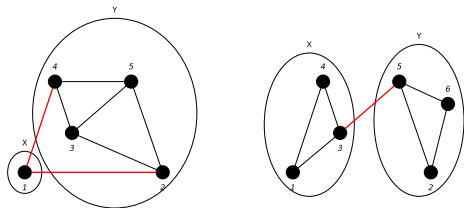


Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

G é k -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho $< k$.

Conexidade por Arestas



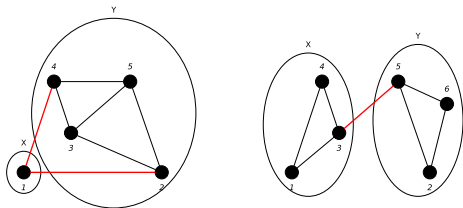
Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

G é k -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho $< k$.

aresta-conexidade de G

Conexidade por Arestas



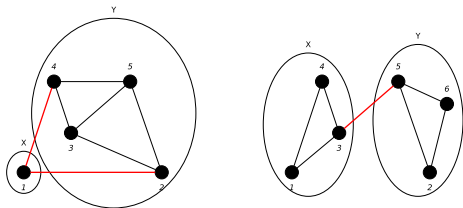
Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

G é k -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho $< k$.

aresta-conexidade de G :

Conexidade por Arestas



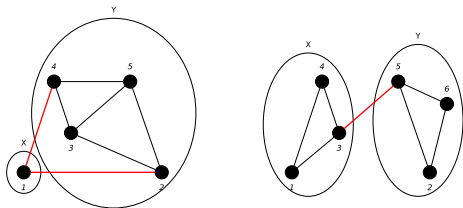
Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

G é k -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho $< k$.

aresta-conexidade de G : $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Conexidade por Arestas



Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

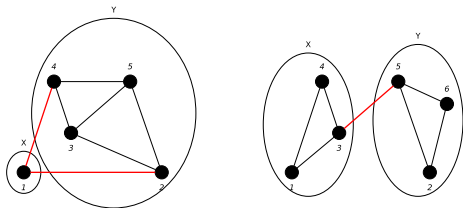
O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

G é k -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho $< k$.

aresta-conexidade de G : $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Se $\{a\}$ é corte, dizemos que a é **aresta de corte**

Conexidade por Arestas



Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

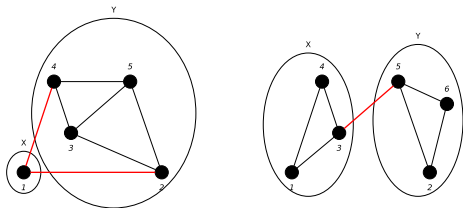
G é k -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho $< k$.

aresta-conexidade de G : $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Se $\{a\}$ é corte, dizemos que a é **aresta de corte**

Aresta a também é chamada de **ponte** de G

Conexidade por Arestas



Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

G é k -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho $< k$.

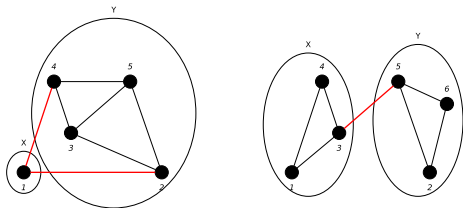
aresta-conexidade de G : $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Se $\{a\}$ é corte, dizemos que a é **aresta de corte**

Aresta a também é chamada de **ponte** de G

Sejam X e Y conjuntos de vértices:

Conexidade por Arestas



Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

G é k -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho $< k$.

aresta-conexidade de G : $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

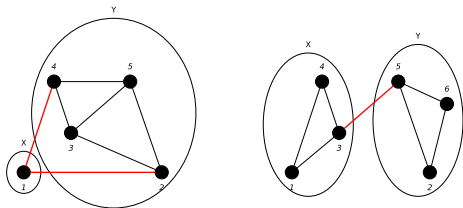
Se $\{a\}$ é corte, dizemos que a é **aresta de corte**

Aresta a também é chamada de **ponte** de G

Sejam X e Y conjuntos de vértices:

corte K separa X e Y

Conexidade por Arestas



Seja G um grafo conexo não trivial e não completo
(como os dois exemplos acima)

O primeiro grafo tem corte K tal que $|K| = 1$? Não.

G é k -aresta conexo: não tem corte de arestas de tamanho $< k$.

aresta-conexidade de G : $\lambda(G) := \min \{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ tem corte de arestas de tamanho } k\}$

Se $\{a\}$ é corte, dizemos que a é **aresta de corte**

Aresta a também é chamada de **ponte** de G

Sejam X e Y conjuntos de vértices:

corte K separa X e Y : X e Y estão em componentes diferentes de $G - K$

Teorema 51

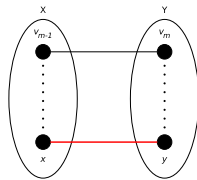
X

Teorema 51

X : conjunto de vértices

Teorema 51

X : conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

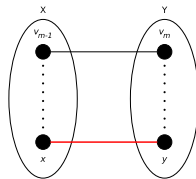


Teorema 51

X : conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$

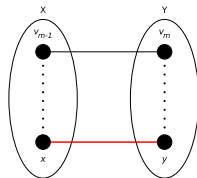


Teorema 51

X : conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

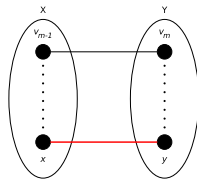
Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$



Teorema 51

X : conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

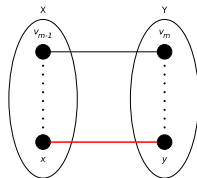


Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$

Teorema 51

X : conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

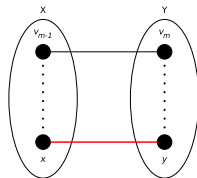


Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$

Teorema 51

X : conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte

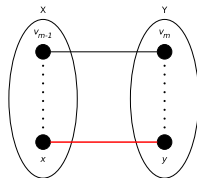


Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte

Teorema 51

X : conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte



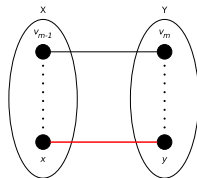
Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
 - 3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$

Teorema 51

X : conjunto de vértices

a fronteira de X é vazia ou é corte

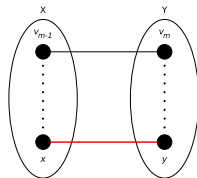


Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
 - 3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
 - 3.2 $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$

Teorema 51

X : conjunto de vértices
a fronteira de X é vazia ou é corte



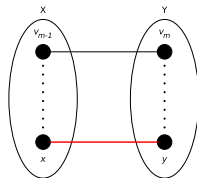
Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
 - 3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
 - 3.2 $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$

Teorema 51

X : conjunto de vértices

a fronteira de X é vazia ou é corte



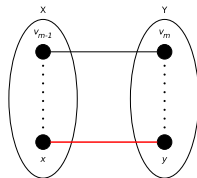
Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
 - 3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
 - 3.2 $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
 - 3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X

Teorema 51

X : conjunto de vértices

a fronteira de X é vazia ou é corte



Demonstração.

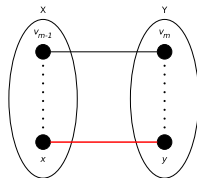
1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
 - 3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
 - 3.2 $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
 - 3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X

$$m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\}$$

Teorema 51

X : conjunto de vértices

a fronteira de X é vazia ou é corte



Demonstração.

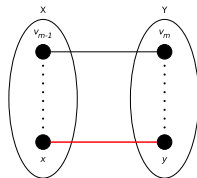
1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
 - 3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
 - 3.2 $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
 - 3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X
 - 3.4 $\{v_{m-1}, v_m\} \in \partial_G(X)$

$$m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\}$$

Teorema 51

X : conjunto de vértices

a fronteira de X é vazia ou é corte



Demonstração.

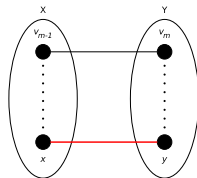
1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
 - 3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
 - 3.2 $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
 - 3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X
 - 3.4 $\{v_{m-1}, v_m\} \in \partial_G(X)$

$$m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\} \\ (v_{m-1} \in X \text{ e } v_m \notin X)$$

Teorema 51

X : conjunto de vértices

a fronteira de X é vazia ou é corte



Demonstração.

1. $\partial_G(X) \neq \emptyset$
2. $\{x, y\}$: aresta em $\partial_G(X)$: $x \in X$ e $y \notin X$
3. supondo: $\partial_G(X)$ não é corte
 - 3.1 x e y estão no mesmo componente de $G - \partial_G(X)$
 - 3.2 $P = (x = v_0, \dots, v_n = y)$: caminho em $G - \partial_G(X)$
 - 3.3 v_m primeiro vértice em P fora de X
 - 3.4 $\{v_{m-1}, v_m\} \in \partial_G(X)$
 - 3.5 contradiz P ser caminho em $G - \partial_G(X)$

$$m := \min \{i \in [0..n] \mid v_i \notin X\} \\ (v_{m-1} \in X \text{ e } v_m \notin X)$$



Corolário 52

Corolário 52

H é componente de G se e
somente se

Corolário 52

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

$(\Rightarrow)$ imediato da definição

$(\Leftarrow)$ 1. h

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$) 1. h : vértice de H

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$) 1. h : vértice de H
 2. v

H é componente de G se e
somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

($\Leftarrow$)

1. h : vértice de H
2. v : vértice fora de H

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

- ($\Leftarrow$)
1. h : vértice de H
 2. v : vértice fora de H
 3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

- ($\Leftarrow$)
1. h : vértice de H
 2. v : vértice fora de H
 3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
 - 3.1 existe caminho de h a v em G

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

- ($\Leftarrow$)
1. h : vértice de H
 2. v : vértice fora de H
 3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
 - 3.1 existe caminho de h a v em G
 - 3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

- ($\Leftarrow$)
1. h : vértice de H
 2. v : vértice fora de H
 3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
 - 3.1 existe caminho de h a v em G
 - 3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$ (argumento da prova do Teorema 51)

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

- ($\Leftarrow$)
1. h : vértice de H
 2. v : vértice fora de H
 3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
 - 3.1 existe caminho de h a v em G
 - 3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$ (argumento da prova do Teorema 51)
 4. não existe $v \in V(G) - V(H)$ tal que $G[V(H) \cup \{v\}]$ seja conexo

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

- ($\Leftarrow$)
1. h : vértice de H
 2. v : vértice fora de H
 3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
 - 3.1 existe caminho de h a v em G
 - 3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$ (argumento da prova do Teorema 51)
 4. não existe $v \in V(G) - V(H)$ tal que $G[V(H) \cup \{v\}]$ seja conexo
 5. H é um subgrafo maximal conexo de G

H é componente de G se e somente se

1. H é subgrafo conexo de G , e
2. $\partial_G(V(H)) = \emptyset$

Demonstração.

($\Rightarrow$) imediato da definição

- ($\Leftarrow$)
1. h : vértice de H
 2. v : vértice fora de H
 3. supondo: $G[V(H) \cup \{v\}]$ é conexo
 - 3.1 existe caminho de h a v em G
 - 3.2 contradiz $\partial_G(V(H)) = \emptyset$ (argumento da prova do Teorema 51)
 4. não existe $v \in V(G) - V(H)$ tal que $G[V(H) \cup \{v\}]$ seja conexo
 5. H é um subgrafo maximal conexo de G
 6. H é componente de G

