

**Teorema 53.** *Todo vértice interno de um grafo induzido por uma trilha tem grau par.*

**Teorema 53.** *Todo vértice interno de um grafo induzido por uma trilha tem grau par.*

**Corolário 54.** *Todo vértice de um grafo induzido por uma trilha fechada tem grau par.*

**Teorema 53.** *Todo vértice interno de um grafo induzido por uma trilha tem grau par.*

**Corolário 54.** *Todo vértice de um grafo induzido por uma trilha fechada tem grau par.*

Uma *trilha euleriana* em  $G$  é uma trilha que passa por todas as arestas de  $G$ .

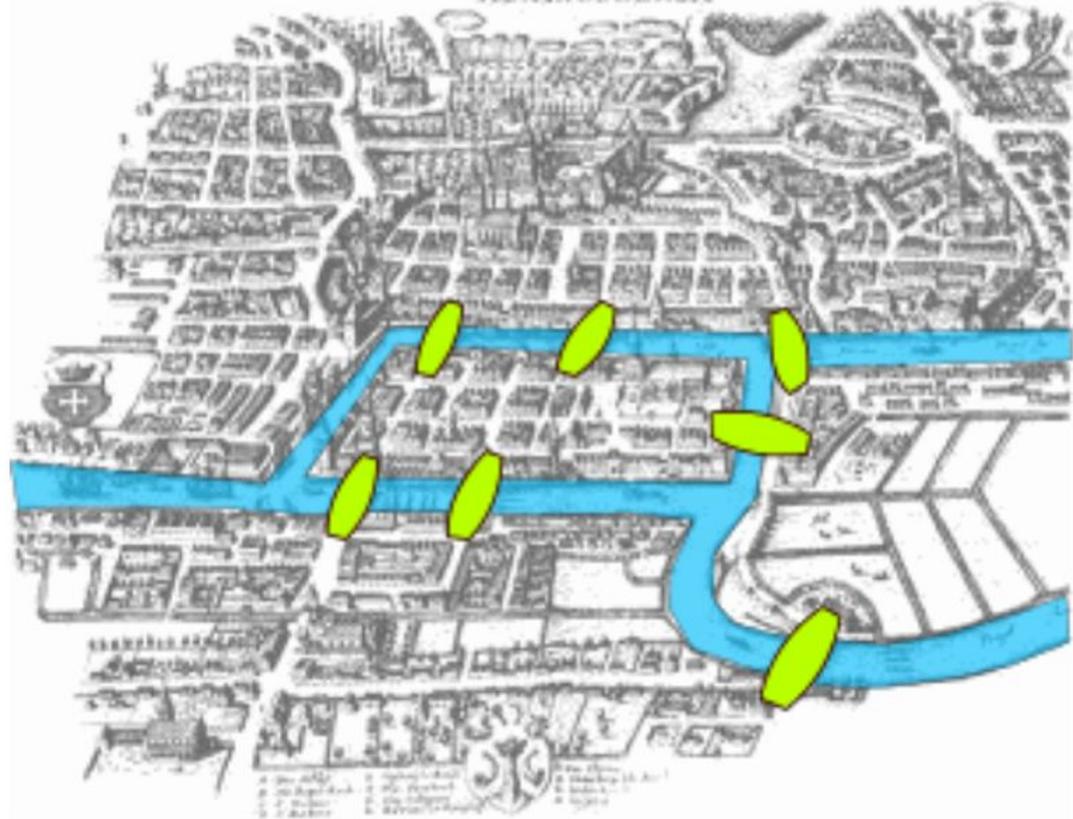
**Teorema 53.** *Todo vértice interno de um grafo induzido por uma trilha tem grau par.*

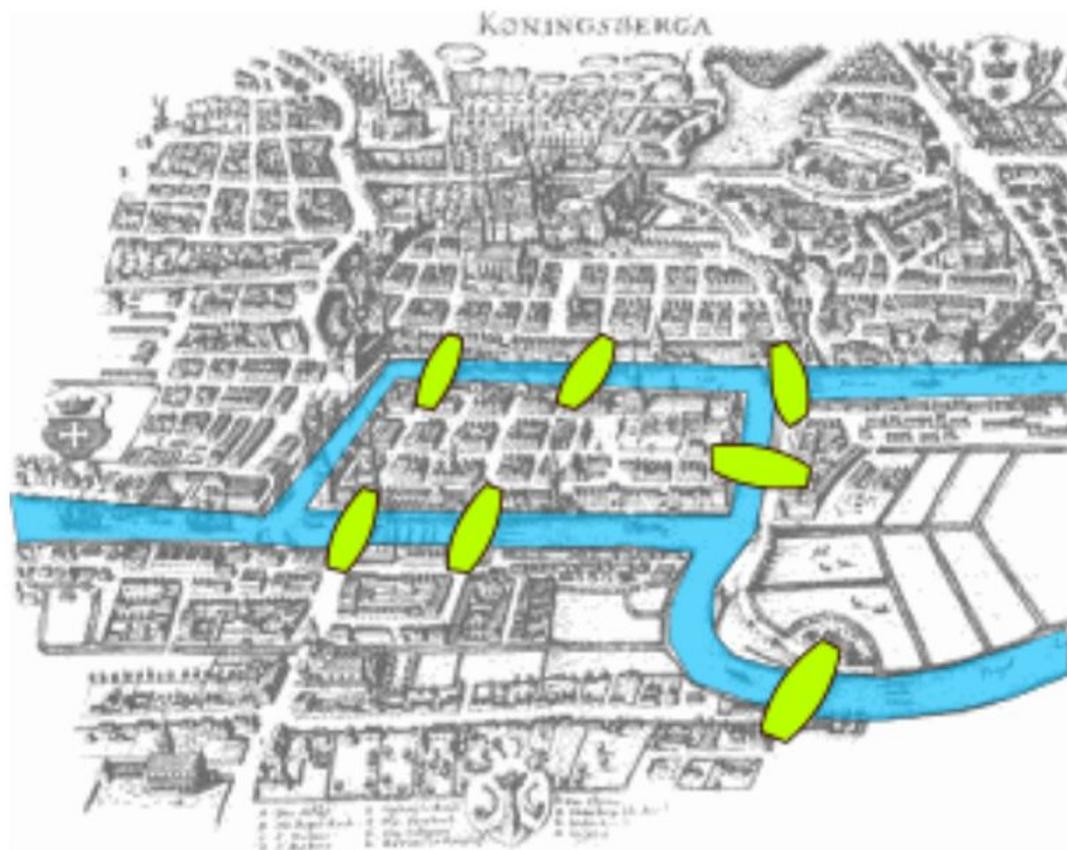
**Corolário 54.** *Todo vértice de um grafo induzido por uma trilha fechada tem grau par.*

Uma *trilha euleriana* em  $G$  é uma trilha que passa por todas as arestas de  $G$ .

Um grafo é *euleriano* se é trivial ou se tem trilha euleriana fechada.

KONINGSBERGA





**Corolário 55.** *Num grafo euleriano todos os vértices tem grau par.*

---

## TrilhaFechada( $G, v$ )

---

Entrada: um grafo  $G$  cujos vértices tem grau par e um vértice  $v$  de grau positivo em  $G$

Saída : uma trilha fechada não trivial em  $G$  a partir de  $v$

$T \leftarrow (v)$

$x \leftarrow v$

Repita

$\{x, y\} \leftarrow$  aresta de  $\partial_G(x) - E(T)$

acrescente  $y$  ao final de  $T$

$x \leftarrow y$

até que  $y = v$

Devolva  $T$

---

---

**TrilhaFechada( $G, v$ )**

---

Entrada: um grafo  $G$  cujos vértices tem grau par e um vértice  $v$  de grau positivo em  $G$

Saída : uma trilha fechada não trivial em  $G$  a partir de  $v$

$T \leftarrow (v)$

$x \leftarrow v$

Repita

$\{x, y\} \leftarrow$  aresta de  $\partial_G(x) - E(T)$

acrescente  $y$  ao final de  $T$

$x \leftarrow y$

até que  $y = v$

Devolva  $T$

---

**Teorema 56.** *Se  $G$  é um grafo cujos vértices todos tem grau par e  $v$  é um vértice de grau positivo em  $G$ , então  $\text{TrilhaFechada}(G, v)$  devolve uma trilha fechada não trivial em  $G$  com início em  $v$ .*

---

### TrilhaEuleriana( $G$ )

---

Entrada: um grafo conexo  $G$  cujos vértices tem grau par

Saída : uma trilha euleriana em  $G$

$r \leftarrow$  vértice de  $G$

$T \leftarrow (r)$

Enquanto  $E(G) \neq E(T)$

$v \leftarrow$  vértice de  $T$  de grau positivo em  $G - E(T)$

faça uma rotação em  $T$  de forma a fazer de  $v$  seu início

$T \leftarrow T \cdot \text{TrilhaFechada}(G - E(T), v)$

Devolva  $T$

---

**Teorema 57.** *Se  $G$  é um grafo conexo cujos vértices todos tem grau par, então  $\text{TrilhaEuleriana}(G)$  é uma trilha euleriana em  $G$ .*

**Corolário 58.** *Um grafo conexo cujos vértices todos tem grau par é euleriano.*

**Teorema 59** (Teorema de Euler (Hierholzer, 1873)). *Um grafo conexo é euleriano se e somente se todos os seus vértices tem grau par.*

**Corolário 60.** *Um grafo conexo tem trilha euleriana aberta se e somente se tem exatamente dois vértices de grau ímpar.*