Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 24: Caminhos Mínimos e o Algoritmo de Dijkstra

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

Departamento de Informática da UFPR

2025/1

Árvore de Caminhos Mínimos

Árvore de Caminhos Mínimos

(G, w)

Árvore de Caminhos Mínimos

(G, w): grafo ponderado conexo

Árvore de Caminhos Mínimos

(G, w): grafo ponderado conexo

árvore de caminhos mínimos

Árvore de Caminhos Mínimos

(G, w): grafo ponderado conexo

árvore de caminhos mínimos: árvore enraizada (T, r)

Árvore de Caminhos Mínimos

(G, w): grafo ponderado conexo

árvore de caminhos mínimos: árvore enraizada (T, r) geradora de G

Árvore de Caminhos Mínimos

(G, w): grafo ponderado conexo

árvore de caminhos mínimos: árvore enraizada (T, r) geradora de G
rTv é caminho mínimo em G para todo $v \in V(G)$

Teorema 85

Teorema 85

Para todo $v \in V(G)$ existe uma árvore de caminhos mínimos enraizada em v

Teorema 85

Para todo $v \in V(G)$ existe uma árvore de caminhos mínimos enraizada em v

Demonstração.

Exercício 118 $\square$

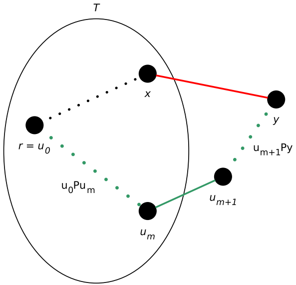
Algoritmo de Dijkstra

CM(G, w, r)

$T \leftarrow (\{r\}, \emptyset)$
Enquanto $\partial_G(V(T)) \neq \emptyset$
    escolha uma aresta $\{x, y\}$ em $\partial_G(V(T))$ tal que $d_T(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo
    acrescente o vértice y e a aresta $\{x, y\}$ a T
Devolva (T, r)

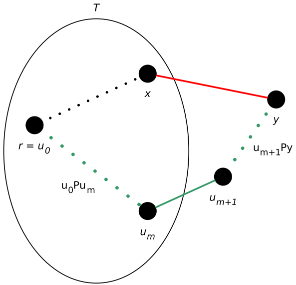
Teorema 86

(T, r): árvore de caminhos mínimos



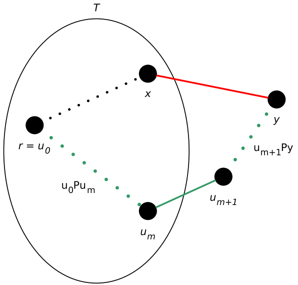
Teorema 86

(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$



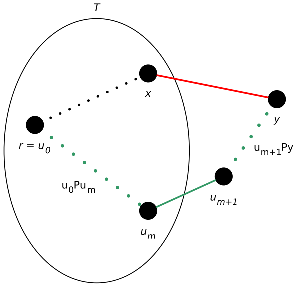
Teorema 86

(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos



Teorema 86

(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

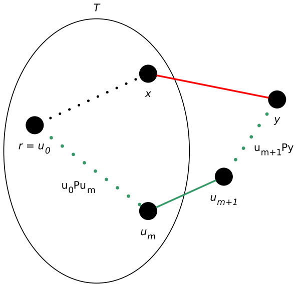


Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$

Teorema 86

(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

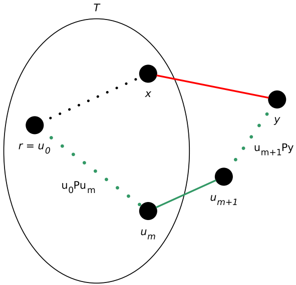


Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y

Teorema 86

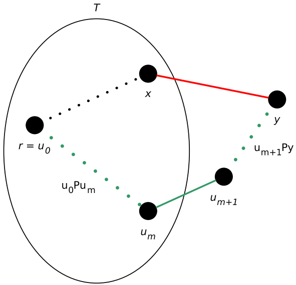
(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos



Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
m

Teorema 86

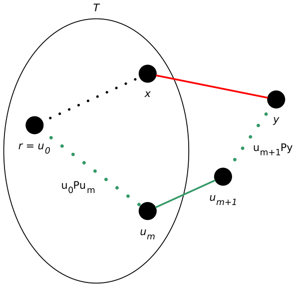


(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
$m :=$ maior índice de um vértice de P em $V(T)$

Teorema 86



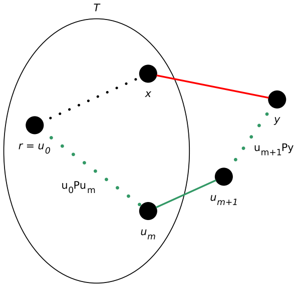
(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
$m :=$ maior índice de um vértice de P em $V(T)$

1. $w(u_0 T u_m) = w(u_0 P u_m)$

Teorema 86



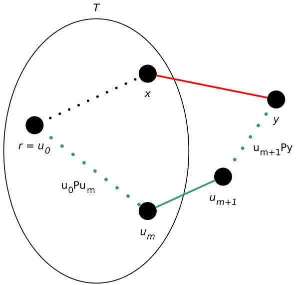
(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
$m :=$ maior índice de um vértice de P em $V(T)$

1. $w(u_0 T u_m) = w(u_0 P u_m)$ $\qquad$ ($u_0 T u_m$ é caminho mínimo em G)

Teorema 86



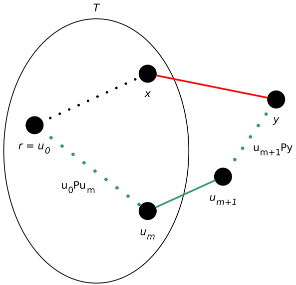
(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
$m :=$ maior índice de um vértice de P em $V(T)$

1. $w(u_0 T u_m) = w(u_0 P u_m)$ $\qquad$ ($u_0 T u_m$ é caminho mínimo em G)
2. $\{u_m, u_{m+1}\} \in \partial_G(V(T))$

Teorema 86



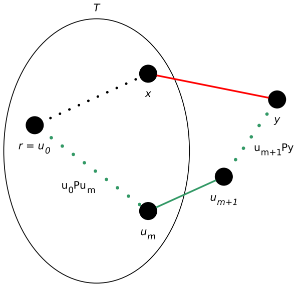
(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
$m :=$ maior índice de um vértice de P em $V(T)$

1. $w(u_0 T u_m) = w(u_0 P u_m)$ ($u_0 T u_m$ é caminho mínimo em G)
2. $\{u_m, u_{m+1}\} \in \partial_G(V(T))$ ($u_{m+1} \notin V(T)$)

Teorema 86



(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

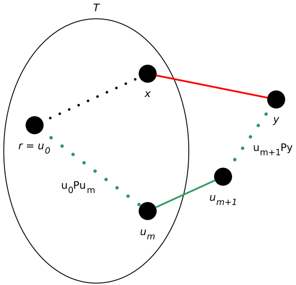
Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
$m :=$ maior índice de um vértice de P em $V(T)$

1. $w(u_0 T u_m) = w(u_0 P u_m)$ $\qquad$ ($u_0 T u_m$ é caminho mínimo em G)
2. $\{u_m, u_{m+1}\} \in \partial_G(V(T))$ $\qquad$ ($u_{m+1} \notin V(T)$)

$T' := T + \{x, y\}$

Teorema 86



(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

Demonstração.

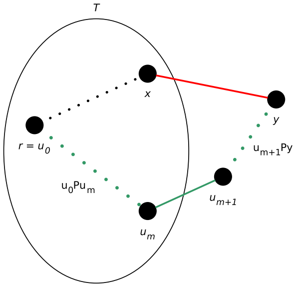
$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
$m :=$ maior índice de um vértice de P em $V(T)$

1. $w(u_0 T u_m) = w(u_0 P u_m)$ ($u_0 T u_m$ é caminho mínimo em G)
2. $\{u_m, u_{m+1}\} \in \partial_G(V(T))$ ($u_{m+1} \notin V(T)$)

$T' := T + \{x, y\}$
pela escolha de $\{x, y\}$:

$$\begin{aligned} w(u_0 T' y) &\le w(u_0 P u_m) + w(\{u_m, u_{m+1}\}) \\ &\le w(u_0 P u_m) + w(\{u_m, u_{m+1}\}) + w(u_{m+1} P y) = w(P) \end{aligned}$$

Teorema 86



(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
$m :=$ maior índice de um vértice de P em $V(T)$

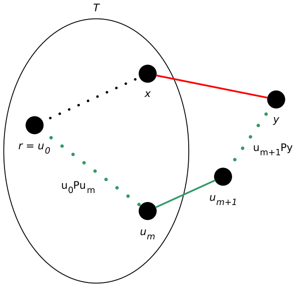
1. $w(u_0 T u_m) = w(u_0 P u_m)$ $\qquad$ ($u_0 T u_m$ é caminho mínimo em G)
2. $\{u_m, u_{m+1}\} \in \partial_G(V(T))$ $\qquad$ $(u_{m+1} \notin V(T))$

$T' := T + \{x, y\}$
pela escolha de $\{x, y\}$:

$$\begin{aligned} w(u_0 T' y) &\leq w(u_0 P u_m) + w(\{u_m, u_{m+1}\}) \\ &\leq w(u_0 P u_m) + w(\{u_m, u_{m+1}\}) + w(u_{m+1} P y) = w(P) \end{aligned}$$

$u_0 T' y$ é caminho mínimo

Teorema 86



(T, r): árvore de caminhos mínimos
$\{x, y\}$: $d_G(r, x) + w(\{x, y\})$ é mínimo em $\partial_G(V(T))$
$(T + \{x, y\}, r)$ é árvore de caminhos mínimos

Demonstração.

$P = (r = u_0, \ldots, u_n = y)$: caminho mínimo de r a y
$m :=$ maior índice de um vértice de P em $V(T)$

1. $w(u_0 T u_m) = w(u_0 P u_m)$ $\qquad$ ($u_0 T u_m$ é caminho mínimo em G)
2. $\{u_m, u_{m+1}\} \in \partial_G(V(T))$ $\qquad$ $(u_{m+1} \notin V(T))$

$T' := T + \{x, y\}$
pela escolha de $\{x, y\}$:

$$\begin{aligned} w(u_0 T' y) &\leq w(u_0 P u_m) + w(\{u_m, u_{m+1}\}) \\ &\leq w(u_0 P u_m) + w(\{u_m, u_{m+1}\}) + w(u_{m+1} P y) = w(P) \end{aligned}$$

$u_0 T' y$ é caminho mínimo $\qquad$ (P é caminho mínimo) $\square$

Corolário 87

Corolário 87

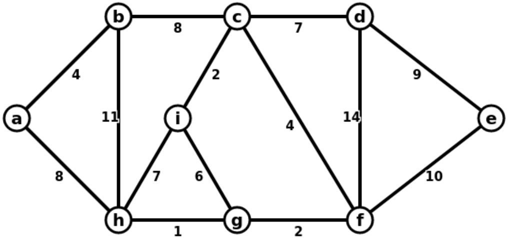
CM(G, w, r) devolve uma árvore de caminhos mínimos de raiz r de (G, w)

O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

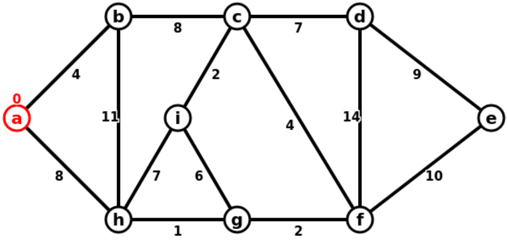


O Algoritmo de Dijkstra

CM′(G, w, r)

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

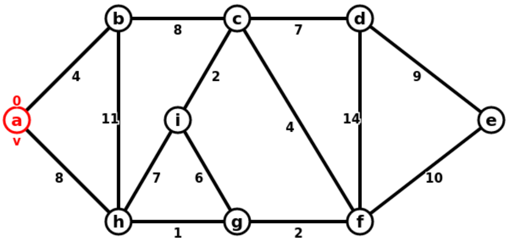


O Algoritmo de Dijkstra

CM′(G, w, r)

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

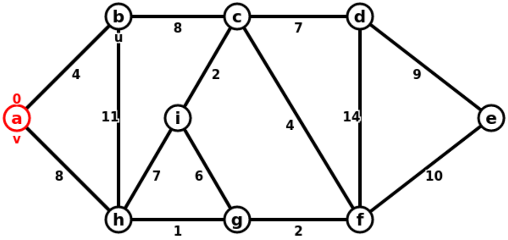


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
  $v.\text{estado} \leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
$r.\text{custo} \leftarrow 0$
$r.\text{estado} \leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
  retire um vértice $v \in V$ tal que $v.\text{custo}$ é mínimo

  Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
    Se u.**estado** $= 1$
      Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
        $u.\text{pai} \leftarrow v$
        $u.\text{custo} \leftarrow$
          $v.\text{custo} + w(\{u, v\})$
    Senão, se u.**estado** $= 0$
      $u.\text{pai} \leftarrow v$
      $u.\text{custo} \leftarrow v.\text{custo} + w(\{u, v\})$
      acrescente u a V
      $u.\text{estado} \leftarrow 1$
  $v.\text{estado} \leftarrow 2$

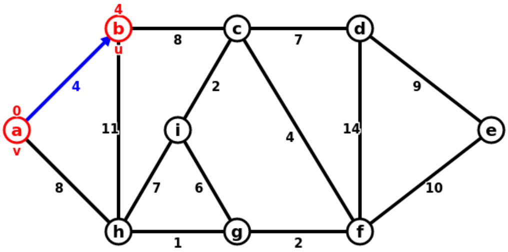


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
$\quad v.\text{estado} \leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
$r.\text{custo} \leftarrow 0$
$r.\text{estado} \leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
$\quad$ retire um vértice $v \in V$ tal que $v.\text{custo}$ é mínimo

$\quad$ Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
$\quad\quad$ Se $u.\textbf{estado} = 1$
$\quad\quad\quad$ Se $v.\textbf{custo} + w(\{u, v\}) < u.\textbf{custo}$
$\quad\quad\quad\quad u.\text{pai} \leftarrow v$
$\quad\quad\quad\quad u.\text{custo} \leftarrow$
$\quad\quad\quad\quad\quad v.\text{custo} + w(\{u, v\})$
$\quad\quad$ Senão, se $u.\textbf{estado} = 0$
$\quad\quad\quad u.\text{pai} \leftarrow v$
$\quad\quad\quad u.\text{custo} \leftarrow v.\text{custo} + w(\{u, v\})$
$\quad\quad\quad$ acrescente u a V
$\quad\quad\quad u.\text{estado} \leftarrow 1$
$\quad v.\text{estado} \leftarrow 2$

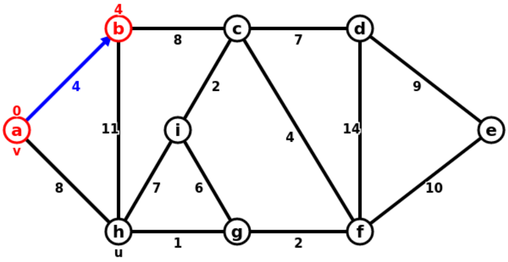


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

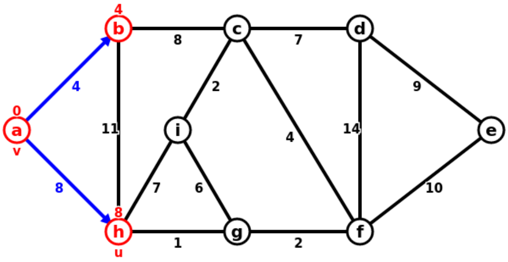


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

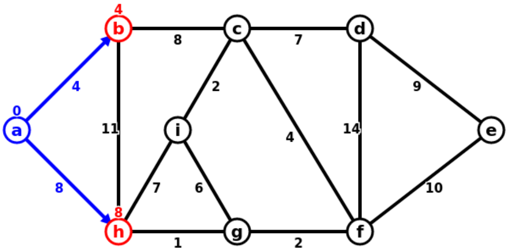


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

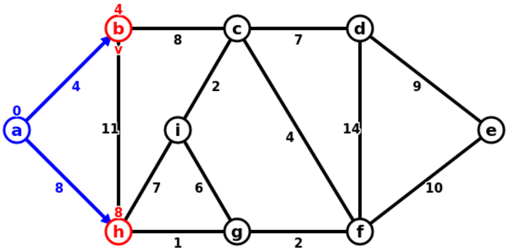


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

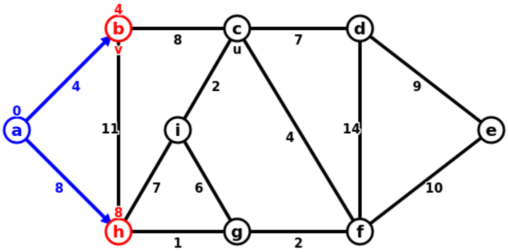


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

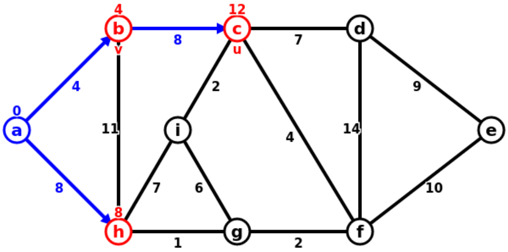


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

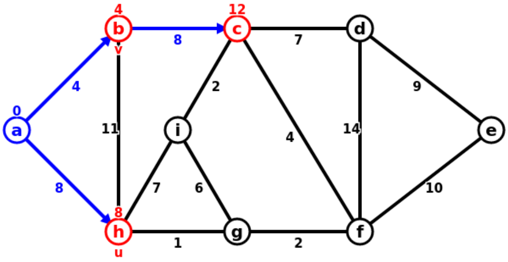


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
  v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
  retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

  Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
    Se u.**estado** $= 1$
      Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
        u.pai $\leftarrow v$
        u.custo $\leftarrow$
         v.custo $+ w(\{u, v\})$
    Senão, se u.**estado** $= 0$
      u.pai $\leftarrow v$
      u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
      acrescente u a V
      u.estado $\leftarrow 1$
  v.estado $\leftarrow 2$

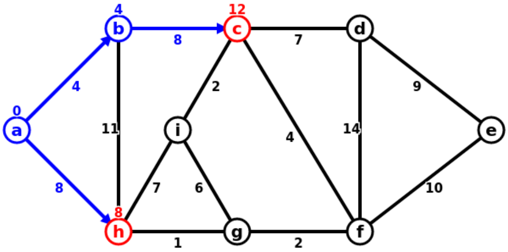


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

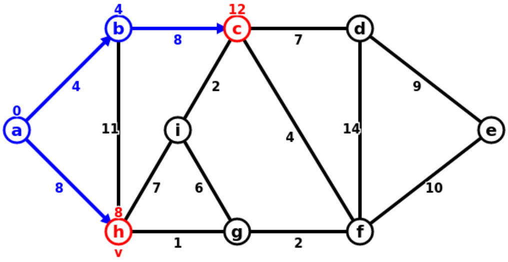


O Algoritmo de Dijkstra

CM$'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
  v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
  retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

  Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
    Se u.**estado** $= 1$
      Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
        u.pai $\leftarrow v$
        u.custo $\leftarrow$
          v.custo $+ w(\{u, v\})$
    Senão, se u.**estado** $= 0$
      u.pai $\leftarrow v$
      u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
      acrescente u a V
      u.estado $\leftarrow 1$
  v.estado $\leftarrow 2$

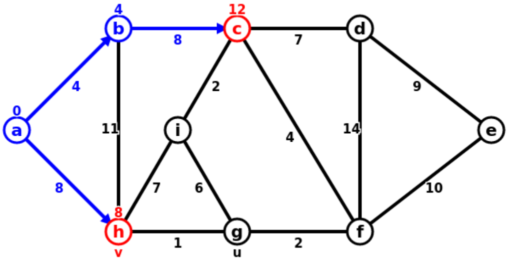


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

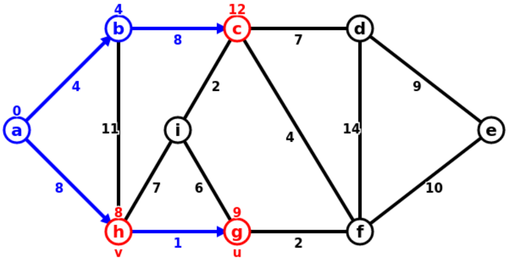


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

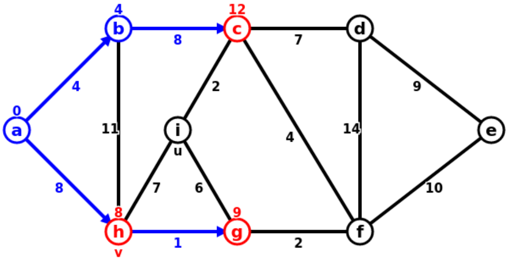


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

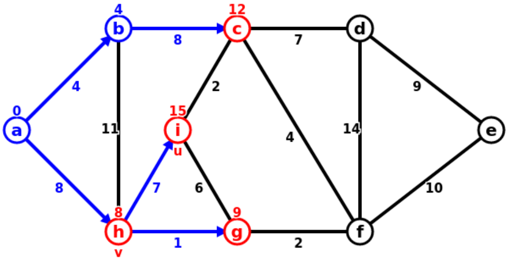


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

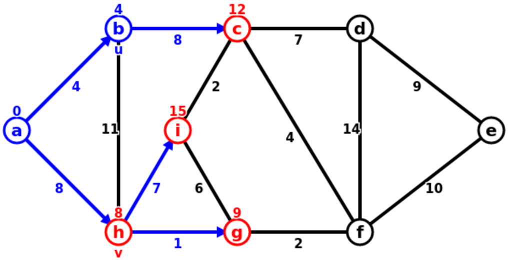


O Algoritmo de Dijkstra

CM′(G, w, r)

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

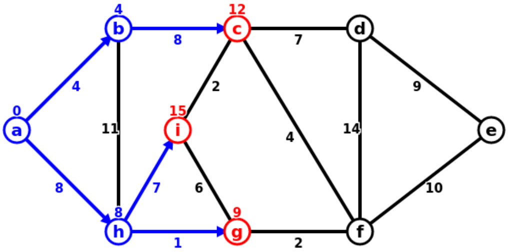


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

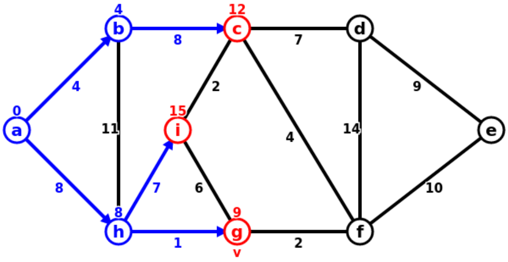


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

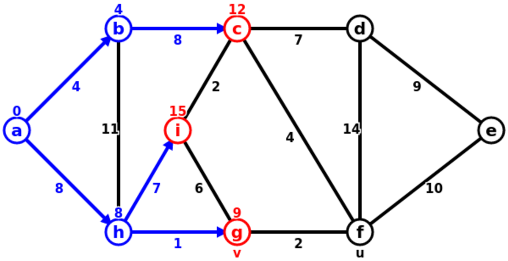


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow$ v.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

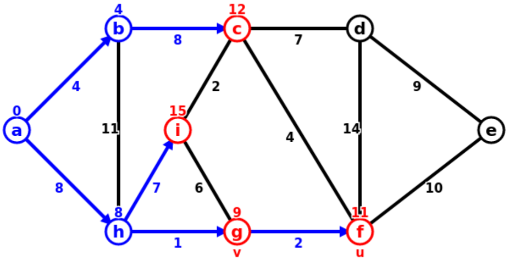


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

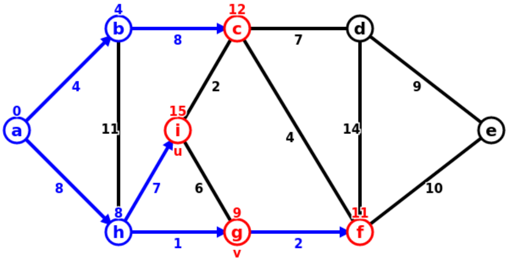


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

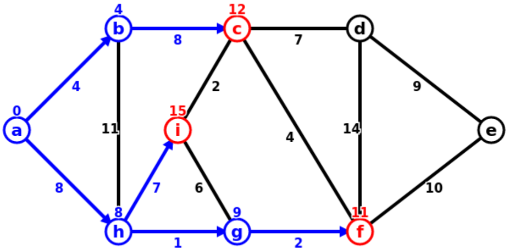


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

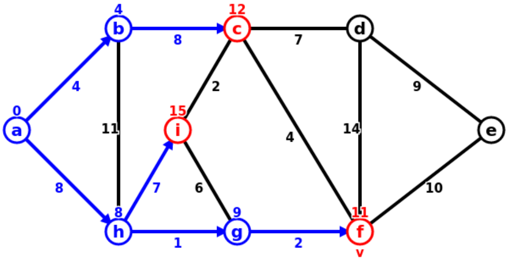


O Algoritmo de Dijkstra

CM′(G, w, r)

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

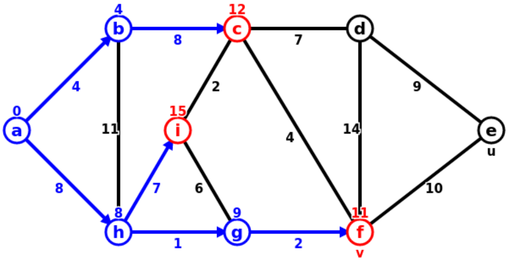


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

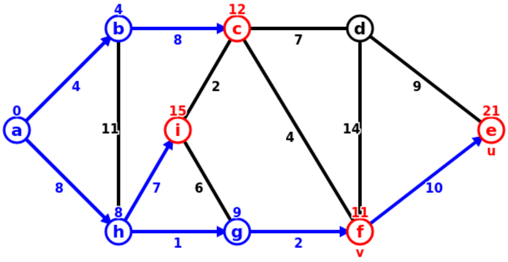


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

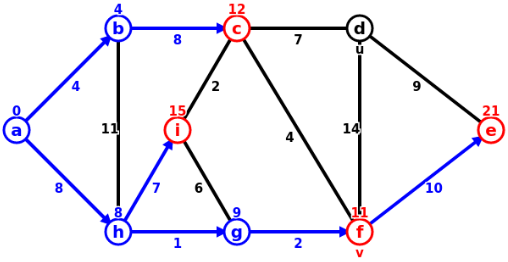


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

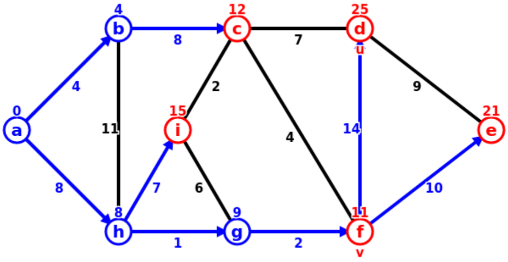


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

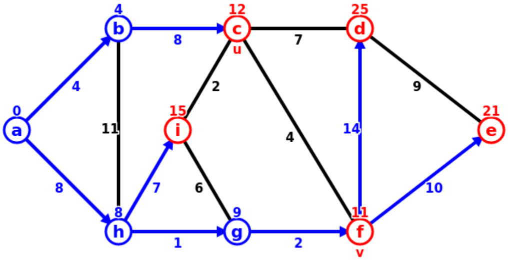


O Algoritmo de Dijkstra

CM′(G, w, r)

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

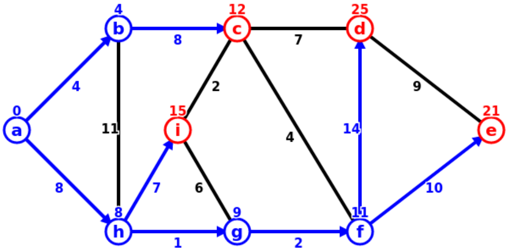


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

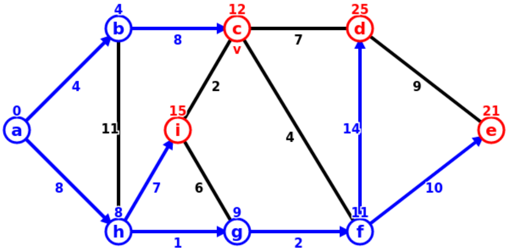


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
  v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
  retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

  Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
    Se u.**estado** $= 1$
      Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
        u.pai $\leftarrow v$
        u.custo $\leftarrow$
          v.custo $+ w(\{u, v\})$
    Senão, se u.**estado** $= 0$
      u.pai $\leftarrow v$
      u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
      acrescente u a V
      u.estado $\leftarrow 1$
  v.estado $\leftarrow 2$

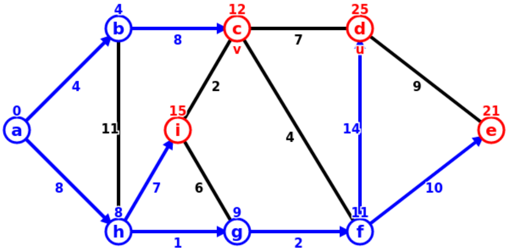


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

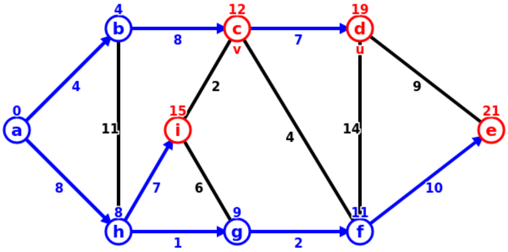


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

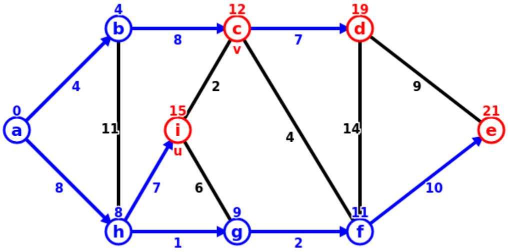


O Algoritmo de Dijkstra

CM$'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

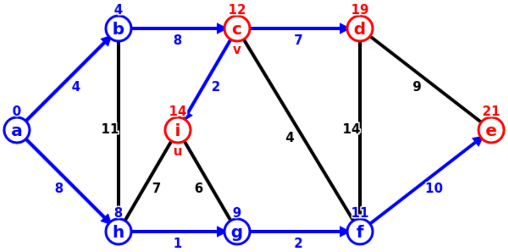


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

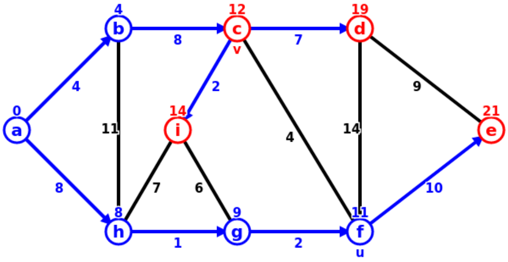


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
　　v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
　　retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

　　Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
　　　　Se u.**estado** $= 1$
　　　　　　Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
　　　　　　　　u.pai $\leftarrow v$
　　　　　　　　u.custo $\leftarrow$
　　　　　　　　　v.custo $+ w(\{u, v\})$
　　　　Senão, se u.**estado** $= 0$
　　　　　　u.pai $\leftarrow v$
　　　　　　u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
　　　　　　acrescente u a V
　　　　　　u.estado $\leftarrow 1$
　　v.estado $\leftarrow 2$

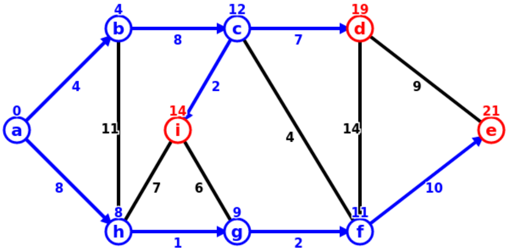


O Algoritmo de Dijkstra

CM′(G, w, r)

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

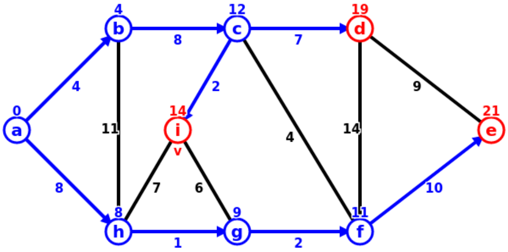


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

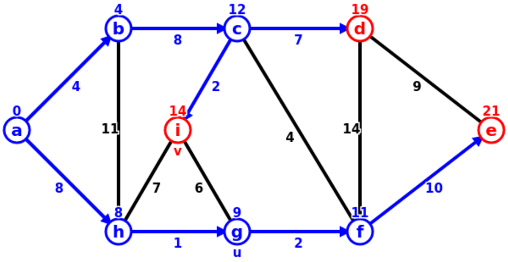


O Algoritmo de Dijkstra

CM′(G, w, r)

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

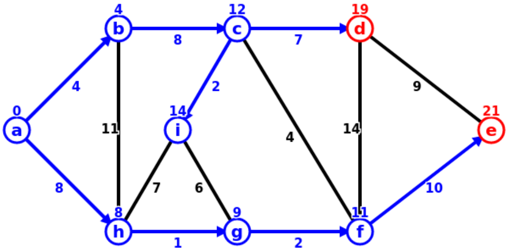


O Algoritmo de Dijkstra

CM′(G, w, r)

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

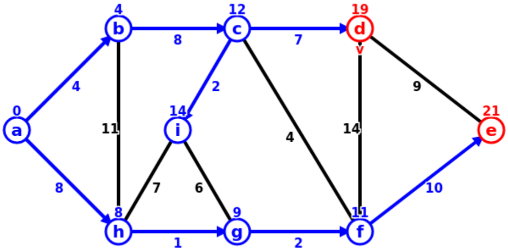


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

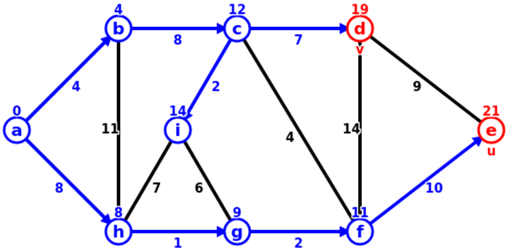


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
  v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
  retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

  Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
    Se u.**estado** $= 1$
      Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
        u.pai $\leftarrow v$
        u.custo $\leftarrow$
         v.custo $+ w(\{u, v\})$
    Senão, se u.**estado** $= 0$
      u.pai $\leftarrow v$
      u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
      acrescente u a V
      u.estado $\leftarrow 1$
  v.estado $\leftarrow 2$

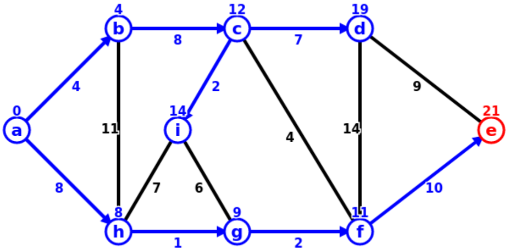


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) <$ u.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

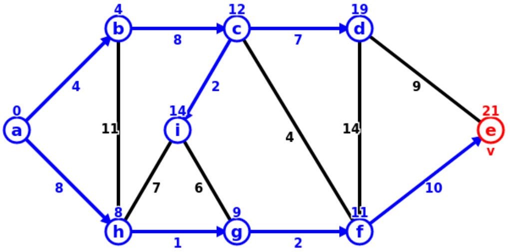


O Algoritmo de Dijkstra

$\mathrm{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

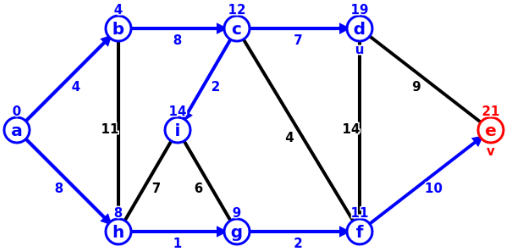


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$

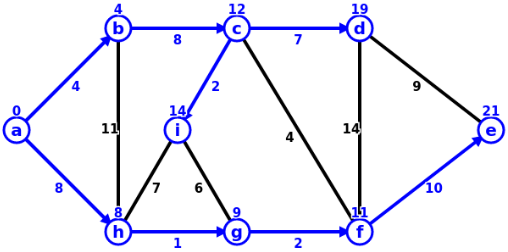


O Algoritmo de Dijkstra

$\text{CM}'(G, w, r)$

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
$V \leftarrow \emptyset$
r.custo $\leftarrow 0$
r.estado $\leftarrow 1$
acrescente r a V
Enquanto $V \neq \emptyset$
    retire um vértice $v \in V$ tal que v.custo é mínimo

    Para **cada** $u \in \Gamma_G(v)$
        Se u.**estado** $= 1$
            Se v.**custo** $+ w(\{u, v\}) < u$.**custo**
                u.pai $\leftarrow v$
                u.custo $\leftarrow$
                  v.custo $+ w(\{u, v\})$
        Senão, se u.**estado** $= 0$
            u.pai $\leftarrow v$
            u.custo $\leftarrow v$.custo $+ w(\{u, v\})$
            acrescente u a V
            u.estado $\leftarrow 1$
    v.estado $\leftarrow 2$



Corolário 88

Corolário 88

(G, w)

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração
   3.1 retira um elemento v de V

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração
   3.1 retira um elemento v de V: $O(\log n)$

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração
   3.1 retira um elemento v de V: $O(\log n)$
   3.2 altera o custo de um vizinho u de v

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração
   3.1 retira um elemento v de V: $O(\log n)$
   3.2 altera o custo de um vizinho u de v: $O(\log n)$

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração
   3.1 retira um elemento v de V: $O(\log n)$
   3.2 altera o custo de um vizinho u de v: $O(\log n)$
   3.3 acrescenta u a V

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração
   3.1 retira um elemento v de V: $O(\log n)$
   3.2 altera o custo de um vizinho u de v: $O(\log n)$
   3.3 acrescenta u a V: $O(\log n)$

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração: $O(\log n)$
   3.1 retira um elemento v de V: $O(\log n)$
   3.2 altera o custo de um vizinho u de v: $O(\log n)$
   3.3 acrescenta u a V: $O(\log n)$

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração: $O(\log n)$
   3.1 retira um elemento v de V: $O(\log n)$
   3.2 altera o custo de um vizinho u de v: $O(\log n)$
   3.3 acrescenta u a V: $O(\log n)$
4. $\leq 2m$ iterações (agregadas entre os laços externo e interno)

Corolário 88

(G, w): grafo ponderado com n vértices e m arestas
r: vértice de G

$$\text{CM'}(G, w, r) \text{ executa em tempo } O(m \log n)$$

Demonstração.

1. V: fila de prioridades $(|V| \leq n)$
2. trecho antes do laço: $O(n)$
3. cada iteração: $O(\log n)$
    3.1 retira um elemento v de V: $O(\log n)$
    3.2 altera o custo de um vizinho u de v: $O(\log n)$
    3.3 acrescenta u a V: $O(\log n)$
4. $\leq 2m$ iterações (agregadas entre os laços externo e interno)
5. tempo de execução total: $O(m \log n)$

□

Corolário 89

Corolário 89

G

Corolário 89

G: grafo com n vértices e m arestas

Corolário 89

G: grafo com n vértices e m arestas

É possível computar em tempo $O(nm \log n)$

Corolário 89

G: grafo com n vértices e m arestas

É possível computar em tempo $O(nm \log n)$

1. distâncias entre todos os pares de vértices de G

Corolário 89

G: grafo com n vértices e m arestas

É possível computar em tempo $O(nm \log n)$

1. distâncias entre todos os pares de vértices de G
2. diâmetro de G