Algoritmos e Teoria dos Grafos

Tópico 26b: Vértices e Arestas de Corte

Renato Carmo
André Guedes
Murilo Silva

Departamento de Informática da UFPR

2025/1

Vértices e Arestas de Corte

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: arborescência produzida por busca em profundidade em G

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: arborescência produzida por busca em profundidade em G

1. *v é vértice de corte*

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: arborescência produzida por busca em profundidade em G

1. *v é vértice de corte* $\Leftrightarrow$

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: arborescência produzida por busca em profundidade em G

1. *v é vértice de corte* $\Leftrightarrow$
    1.1 $v = r(T)$ *e tem mais de um filho*

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: *arborescência produzida por busca em profundidade em* G

1. v *é vértice de corte* $\Leftrightarrow$
   1.1 $v = r(T)$ *e tem mais de um filho*
   ou,
   1.2 $v \neq r(T)$ *tem um filho* w *tal que*

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: arborescência produzida por busca em profundidade em G

1. *v é vértice de corte $\Leftrightarrow$*
   1.1 *$v = r(T)$ e tem mais de um filho*
   ou,
   1.2 *$v \neq r(T)$ tem um filho w tal que*
   nenhum descendente de w é vizinho de um ancestral próprio de v

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: arborescência produzida por busca em profundidade em G

1. *v é vértice de corte $\Leftrightarrow$*
   1.1 *$v = r(T)$ e tem mais de um filho*
   ou,
   1.2 *$v \neq r(T)$ tem um filho w tal que*
   nenhum descendente de w é vizinho de um ancestral próprio de v
   (usando aresta de $G \setminus T$)

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: arborescência produzida por busca em profundidade em G

1. *v é vértice de corte $\Leftrightarrow$*
    1.1 *$v = r(T)$ e tem mais de um filho*
    ou,
    1.2 *$v \neq r(T)$ tem um filho w tal que*
    nenhum descendente de w é vizinho de um ancestral próprio de v
    (usando aresta de $G \setminus T$)
2. *$\{u, v\}$ é aresta de corte*

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: arborescência produzida por busca em profundidade em G

1. *v é vértice de corte $\Leftrightarrow$*
   1.1 *$v = r(T)$ e tem mais de um filho*
   ou,
   1.2 *$v \neq r(T)$ tem um filho w tal que*
   nenhum descendente de w é vizinho de um ancestral próprio de v
   (usando aresta de $G \setminus T$)
2. *$\{u, v\}$ é aresta de corte $\Leftrightarrow$*

Vértices e Arestas de Corte

Teorema

T: arborescência produzida por busca em profundidade em G

1. *v é vértice de corte $\Leftrightarrow$*
   1.1 *$v = r(T)$ e tem mais de um filho*
   ou,
   1.2 *$v \neq r(T)$ tem um filho w tal que*
   nenhum descendente de w é vizinho de um ancestral próprio de v
   (usando aresta de $G \setminus T$)
2. *$\{u, v\}$ é aresta de corte $\Leftrightarrow$*
   u é pai de v em T e nenhuma (outra) aresta liga descendente de v a ancestral de u

“low point”

“low point”

T

“low point”

T: arborescência produzida por busca em profundidade

“low point”

T: arborescência produzida por busca em profundidade

$\ell_T(v)$

“low point”

T: arborescência produzida por busca em profundidade

$\ell_T(v)$: nível do vértice “mais ancestral” dentre v e os vizinhos de seus descendentes por arestas de $G - T$

“low point”

T: arborescência produzida por busca em profundidade

$\ell_T(v)$: nível do vértice “mais ancestral” dentre v e os vizinhos de seus descendentes por arestas de $G - T$

$$\ell_T(v) := \min \{L_T(v)\} \cup \{L_T(u) \mid \{w, u\} \in E(G) - E(T) \text{ e } w \text{ é descendente de } v \text{ em } T\}.$$

Caracterização de vértices e arestas de corte com “lowpoint”

Corolário

T

Caracterização de vértices e arestas de corte com “lowpoint”

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

Caracterização de vértices e arestas de corte com "lowpoint"

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

1. *v é vértice de corte* $\Leftrightarrow$

Caracterização de vértices e arestas de corte com "lowpoint"

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

1. *v é vértice de corte $\Leftrightarrow$*
   1.1 *$v = r(T)$ e tem mais de um filho*

Caracterização de vértices e arestas de corte com “lowpoint”

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

1. *v é vértice de corte $\Leftrightarrow$*
   1.1 *$v = r(T)$ e tem mais de um filho*
   ou,
   1.2 *$v \neq r(T)$ e tem filho w tal que $L_T(v) \leq \ell_T(w)$*

Caracterização de vértices e arestas de corte com “lowpoint”

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

1. *v é vértice de corte $\Leftrightarrow$*
   1.1 *$v = r(T)$ e tem mais de um filho*
   ou,
   1.2 *$v \neq r(T)$ e tem filho w tal que $L_T(v) \leq \ell_T(w)$*
2. *$\{u, v\}$ é aresta de corte $\Leftrightarrow$*

Caracterização de vértices e arestas de corte com “lowpoint”

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

1. v *é vértice de corte* $\Leftrightarrow$
   1.1 $v = r(T)$ *e tem mais de um filho*
   ou,
   1.2 $v \neq r(T)$ *e tem filho* w *tal que* $L_T(v) \leq \ell_T(w)$
2. $\{u, v\}$ *é aresta de corte* $\Leftrightarrow$
   u *é pai de* v *em* T *e* $L_T(u) < \ell_T(v)$

Recorrência

Corolário

T

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

Recorrência

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

$$\ell_T(v) = \min\{L_T(v)\}$$

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

$$\ell_T(v) = \min\{L_T(v)\} \cup \{L_T(u) \mid \{v, u\} \in E(G - T)\}$$

Recorrência

Corolário

T: arborescência produzida por busca em profundidade

$$\ell_T(v) = \min \{L_T(v)\} \cup \{L_T(u) \mid \{v, u\} \in E(G - T)\} \cup \{\ell_T(w) \mid w \text{ é filho de } v \text{ em } T\}$$

Algoritmo

Algoritmo

LowPoint(G)

Para **cada** $v \in V(G)$
    v.estado $\leftarrow 0$
    v.pai $\leftarrow \Lambda$
Para **cada** $v \in V(G)$
    Se v.**estado** $= 0$
        $v.\ell \leftarrow v$.nivel $\leftarrow 0$
        LowPoint(G, v)

Algoritmo

Algoritmo

LowPoint(G, r)

---

r.estado $\leftarrow 1$
Para **cada** $w \in \Gamma_G(r)$
    Se w.**estado** $= 1$ **e** w.**nivel** $< r.\ell$
        $r.\ell \leftarrow w$.nivel
    Senão, se w.**estado** $= 0$
        w.pai $\leftarrow r$
        $w.\ell \leftarrow w$.nivel $\leftarrow r$.nivel $+ 1$
        LowPoint(G, w)
        Se $w.\ell < r.\ell$
            $r.\ell \leftarrow w.\ell$
r.estado $\leftarrow 2$

Complexidade

Complexidade

Corolário

É possível detectar os vértices e arestas de corte de um grafo com n vértices e m arestas em tempo $O(n + m)$.

Complexidade

Corolário

É possível detectar os vértices e arestas de corte de um grafo com n vértices e m arestas em tempo $O(n + m)$.

Corolário

É possível computar os blocos de um grafo com n vértices e m arestas em tempo $O(n + m)$.