

CI1238 - Otimização

Aula 01 - Apresentação da Disciplina e Conceitos Preliminares

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

Questões Administrativas

1. Página da Disciplina
2. Avaliação
3. Frequência nas aulas
4. Bibliografia
5. Cronograma/Programa

Questões Administrativas

Página da Disciplina:

1. <https://www.inf.ufpr.br/murilo/ci1238/ci1238-b.html>
2. Informações essenciais
3. Informações **oficiais**

Avaliações:

1. Duas provas: 70% da nota
2. Dois trabalhos: 30% da nota

Frequência nas aulas:

Obrigatória

Questões Administrativas – Bibliografia

1. MATOUSEK, J.; GARTNER, B.
Understanding and Using Linear Programing, 2007.
2. PAPADIMITRIOU, C.; STEIGLIZ, K.
Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, 1998.
3. KREHER, D; STINSON, D.
Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search, 1999.
4. KLEIBERG, J.; TARDOS, E.
Algorithm Design , Pearson, 2005
5. DASGUPTA, S.; PAPADIMITRIOU, C.; VAZIRANI, U..
Algorithms, 2006
6. CORMEN, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C.
Introduction to Algorithms, 2009

Questões Administrativas - Programa

1. **Problemas de Otimização**

- 1.1 Conceitos Preliminares
- 1.2 Problemas computacionais

2. **Programação Linear**

- 2.1 Modelagem
- 2.2 Algoritmo Simplex
- 2.3 Programação Linear Inteira

3. **Técnicas combinatórias de algoritmos**

- 3.1 Enumeração;
- 3.2 Backtracking;
- 3.3 Branch-and-bound;
- 3.4 Programação dinâmica;
- 3.5 Algoritmos gulosos;
- 3.6 Algoritmos de Aproximação

Conceitos Preliminares

Conjuntos, Listas, Permutações:

- ▶ Usamos chaves para denotar conjuntos:

Exemplo: $A = \{1, 5, 9, 7\}$

- ▶ Usamos colchetes para listas:

Exemplo: $A = [1, 5, 9, 7, 1]$ (existe ordem e possibilidade de repetição)

Usamos a notação $A[1] = 1, A[2] = 5, A[3] = 9, \dots$ (semelhante a vetor)

Também usamos a notação $A_1 = 1, A_2 = 5, A_3 = 9, \dots$

- ▶ Listas, vetores, tuplas (até mesmo strings) tratados como equivalentes

Exemplo: $A = (1, 5, 9, 7, 1)$ (exemplo de tupla)
 $= [1, 5, 9, 7, 1]$

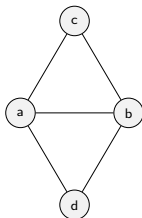
- ▶ Permutação de um conjunto S com n elementos:

Definido como uma **lista de n elementos de S sem repetição**.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, o **intervalo inteiro** de a a b é o conjunto dos inteiros entre a e b .

$$[a..b] = \{z \in \mathbb{Z} \mid a \leq z \leq b\}$$

Grafos, grafos direcionados e grafos ponderados



Um *grafo* G é um par de conjuntos $(V(G), E(G))$,

- ▶ $V(G)$, chamado de **conjunto de vértices**, é um conjunto finito;
- ▶ $E(G)$, chamado de **conjunto de arestas**, é um conjunto em que cada elemento consiste de um conjunto de dois vértices.

e.g., O par $G = (V(G), E(G))$, sendo $V(G) = \{a, b, c, d\}$ e $E(G) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}\}$ é um grafo

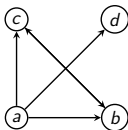
Grafos, grafos direcionados e grafos ponderados

Um *grafo* G é um par de conjuntos $(V(G), E(G))$,

- ▶ $V(G)$, chamado de **conjunto de vértices**, é um conjunto finito;
- ▶ $E(G)$, chamado de **conjunto de arestas**, é um conjunto em que cada elemento é um conjunto de dois vértices.

Um **grafo direcionado** G é um par $(V(G), E(G))$

- ▶ $V(G)$ é um conjunto finito, chamado de conjunto de vértices
- ▶ $E(G)$ é um conjunto de pares de vértices, chamado de **conjunto de arcos** (também chamados de conjunto de **arestas direcionadas**)



$$V(G) = \{a, b, c, d\} \quad E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$$

Grafos, grafos direcionados e grafos ponderados

Um *grafo* G é um par de conjuntos $(V(G), E(G))$ onde

- ▶ $V(G)$ é um conjunto finito, chamado de **conjunto de vértices**
- ▶ $E(G)$ é um conjunto onde cada elemento é um conjunto de dois vértices, chamado de **conjunto de arestas**

Um **grafo direcionado** G é um par $(V(G), E(G))$

- ▶ $V(G)$ é um conjunto finito, chamado de conjunto de vértices
- ▶ $E(G)$ é um conjunto de pares de vértices, chamado de **conjunto de arcos**

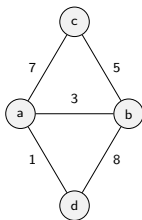
Notação simplificada: $G = (V, E)$ ao invés de $G = (V(G), E(G))$

Quando o $V(G)$ não é definido explicitamente, a convenção é $V(G) = \{1, \dots, n\}$.

Notação simplificada: uv denota a aresta $\{u, v\}$
o arco (u, v) (no caso direcionado)

Grafos, grafos direcionados e grafos ponderados

Um *grafo ponderado* é um par (G, w) onde G é um grafo e w é uma função que associa a cada aresta a de G um *peso* $w(a)$.



Neste exemplo, $w(ac) = 7$, $w(bc) = 5$, $w(ab) = 3$, $w(ad) = 1$ e $w(db) = 8$
 $w(cd)$ não é definido.

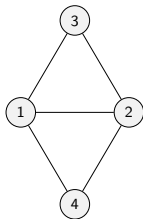
- ▶ **Grafos direcionados ponderados** são definidos de maneira análoga.
- ▶ Simplificando: às vezes diremos “**grafo ponderado G** ” (i.e., fica implícito que a função de pesos é w)
- ▶ Convenção: Se G não é um grafo ponderado, $\forall uv \in E(G)$, $w(uv) = 1$.

Matriz de Adjacência, propriedades de grafos

Matriz de Adjacência de um grafo G : é a matriz M_G indexada por $V(G) \times V(G)$ dada por

$$M_G[u, v] = \begin{cases} w(u, v), & uv \in E(G), \\ 0, & uv \notin E(G). \end{cases}$$

Exemplo: Considere o grafo G do desenho abaixo:



$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Adjacência, propriedades de grafos

Matriz de Adjacência de um grafo G : A *matriz de adjacência* de G é a matriz M_G indexada por $V(G) \times V(G)$ dada por

$$M_G[u, v] = \begin{cases} w(u, v), & uv \in E(G), \\ 0, & uv \notin E(G). \end{cases}$$

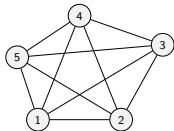
Mais definições sobre grafos:

Uma clique em um grafo G : um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $\forall u, v \in S, uv \in E(G)$ (i.e., todo par de vértices em S é adjacente)

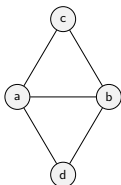
Um conjunto independente em um grafo G : um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $\forall u, v \in S, uv \notin E(G)$ (i.e., nenhum par de vértices em S é adjacente)

Matriz de Adjacência, propriedades de grafos

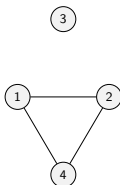
Grafo completo: existe uma aresta entre cada par de vértices do grafo



Grafo conexo: existe um caminho entre cada par de vértices



um grafo conexo



um grafo desconexo

Grafo hamiltoniano: existe ciclo visitando todos os vértices (sem repetir)
- definição precisa no próximo slide

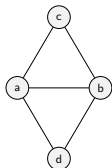
Grafos Hamiltonianos

Seja G um grafo com n vértices

Seja $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_n]$ uma permutação de $V(G)$.

Definição de Circuito Hamiltoniano: A permutação π é um **circuito hamiltonino** de G se $\pi_i \pi_{i+1} \in E(G)$, $i = 1, \dots, n - 1$
e $\pi_n \pi_1 \in E(G)$

- ▶ Isto é, existe um ciclo passando por todos os vértices do grafo
- ▶ Grafos que admitem circuitos hamiltonianos: **grafos hamiltonianos**.



- ▶ $[a, c, b, d]$ é um circuito hamiltoniano do grafo acima
- ▶ $[a, b, c, d]$ **não** é um circuito hamiltoniano do grafo acima

Exercícios

Responda as questões abaixo:

1. Quantas arestas contém um grafo completo com n vértices?
2. É verdade que todo grafo completo também é conexo?
3. Desenhe todos os grafos de 4 vértices.
(Lembre: quando conjunto de vértices do grafo não é especificado, por convenção usamos naturais $1,2,3,\dots$)
4. Enumere todas as cliques de um grafo completo de 4 vértices.
5. É verdade que todo grafo completo também é um grafo hamiltoniano?
6. É verdade que todo grafo com pelo menos 6 vértices tem uma clique de tamanho 3 ou um conjunto independente de tamanho 3 (ou ambos)?