

# CI1238 - Otimização

## Aula 02 - Problemas Computacionais e Algoritmos

**Professor Murilo V. G. da Silva**

Departamento de Informática  
Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

# Problemas Computacionais e Algoritmos

*Problema computacional:* pode ser formulado como uma **relação**:

- ▶ entre um conjunto de entradas
- ▶ entre e um conjunto de saídas.

Nesta relação cada entrada do problema tem um conjunto de saídas associadas.

Exemplo: Considere o problema de encontrar o local onde está o elemento mínimo de um vetor:

- ▶ para cada **vetor** dado como entrada,
- ▶ as saídas válidas são os índices para elementos que são mínimos.

# Problemas Computacionais e Algoritmos

Em um *problema computacional*:

- ▶ entrada: normalmente chamada de **instância** do problema
- ▶ saída: normalmente chamada de **solução** (ou **resposta**) da instância.

# Problemas Computacionais e Algoritmos

## MÍNIMO DE VETOR (MINV)

**Instância:**  $(v, a, b)$ , onde  $v$  é um vetor indexado por  $[a..b]$ , com  $a \leq b$ .

**Solução:** um índice  $m \in [a..b]$  tal que  $v[m] \leq v[i]$  para todo  $i \in [a..b]$ .

Se  $v$  é dado por

| $i$    | 1  | 2  | 3 | 4  | 5  | 6 | 7  |
|--------|----|----|---|----|----|---|----|
| $v[i]$ | 16 | 23 | 4 | 42 | 15 | 8 | 4, |

então

- ▶  $(v, 1, 7)$  é uma instância do problema Mínimo de Vetor e os números 3 e 7 são ambos soluções para esta instância.
- ▶  $(v, 4, 6)$  é uma instância do problema Mínimo de Vetor e 6 é uma solução para esta instância.

**Relembrando:** a terminologia “6 é uma resposta para esta instância  $(v, 4, 6)$ ” é também comumente utilizada.

# Problemas computacionais e algoritmos

Uma *solução de um problema computacional* é:

- ▶ um *algoritmo* que recebe uma instância qualquer do problema
- ▶ devolve uma solução para a instância.
- ▶ **Note: solução de um problema  $\neq$  solução de uma instância!**

Um problema computacional pode ter diversas soluções.

# Tipos de Problemas Computacionais

Problemas computacionais normalmente são classificados de acordo com o **tipo de solução** associada às suas instâncias.

- ▶ *problema de decisão*: Solução é do tipo **SIM** ou **NÃO**
- ▶ *problema de busca*: A solução é um **objeto** que satisfaça uma dada propriedade (um predicado).
- ▶ *problema de otimização*: solução é um **objeto** que satisfaça uma dada propriedade e, além disso,  
**maximize/minimize uma certa função objetivo.**

O Problema MÍNIMO DE VETOR é de qual tipo? Problema de busca.

# Exemplos de problemas

## PRIMALIDADE (PRIMO)

**Instância:** um inteiro positivo  $N$ .

**Solução:** SIM se  $N$  é um número primo ou NÃO caso contrário.

Que tipo de problema é este? R: Problema de decisão.

## MOCHILA (MOCHILA)

**Instância:**  $(v, w, n, C)$ , onde  $v$  é uma lista de  $n$  valores reais,  $w$  é uma lista de  $n$  pesos reais e  $C$  um número real (capacidade da mochila).

**Solução:**  $n$ -tupla  $(x_0, \dots, x_{n-1})$  tal que  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $\sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i \leq C$  e  $\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$  seja máximo.

Que tipo de problema é este? R: Problema de otimização.

# Exemplos de problemas

## CAIXEIRO VIAJANTE (CAIXEIRO)

**Instância:** Grafo completo  $G$  com  $n$  vértices e pesos positivos nas arestas

**Solução:** uma permutação  $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_n]$  de  $V(G)$  tal que

$$\sum_{i=1}^n w(\pi_i \pi_{i+1}) \text{ é mínimo.} \quad (\text{onde } i \text{ é tomado mod } n)$$

Que tipo de problema é este? R: Problema de otimização.

Note: Se  $G$  é uma instância do problema CAIXEIRO

- A solução para  $G$  é um circuito hamiltoniano de custo mínimo em  $G$ .

# Exercícios

Considere os seguintes problemas:

## CIRCUITO HAMILTONIANO MÍNIMO (CHM)

**Instância:** Grafo ponderado  $G$  com  $n$  vértices

**Solução:** um circuito hamiltoniano  $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_n]$  de  $G$  tal que

$$\sum_{i=1}^n w(\pi_i \pi_{i+1}) \text{ é mínimo. } \quad (i \text{ é tomado mod } n)$$

## CLIQUE MÁXIMA (MAXCLIQUE)

**Instância:** Grafo  $G$

**Solução:** uma clique em  $G$  de tamanho máximo

Responda as questões abaixo:

1. Que tipo de problema são os problemas CHM e MAXCLIQUE?
2. Qual a diferença entre o problema CHM e o problema CAIXEIRO?
3. Mostre que CHM é polinomialmente redutível CAIXEIRO e vice-versa.

## Exemplos de problemas (cont.)

### MÍNIMO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA (MINQUAD)

**Instância:** uma tripla  $(c_1, c_2, c_3)$  de coeficientes reais.

**Solução:** valor  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$  seja mínimo.

Que tipo de problema é este? R: Problema de otimização.

# Formalizando Decisão, Busca e Otimização

Problemas de decisão:

*Dado* : entrada  $x$

*Responda:*  $\exists y$  tal que certo predicado  $P_x(y)$  é verdadeiro?

Problemas de busca:

*Dado* : entrada  $x$

*Encontre:*  $y$  tal que certo predicado  $P_x(y)$  é verdadeiro

Problemas de otimização:

*Dado* : entrada  $x$

*Encontre:*  $y$  tal que certo predicado  $P_x(y)$  é verdadeiro e  $f_x(y)$  é máximo entre todos elementos que fazem  $P_x$  é verdadeiro

# Relembrando exemplos vistos anteriormente

O problema **MOCHILA**:

**Instância:**  $(v, w, n, C)$ , onde  $v$  e  $w$  são listas de  $n$  valores e pesos reais, e  $C \in \mathbb{R}$ .

**Solução:**  $n$ -tupla  $(x_0, \dots, x_{n-1})$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $\sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i \leq C$  e  $\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$  seja máximo.

Considere a instância  $I = (v, w, n, C)$

Dado  $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$   $x_i \in \{0, 1\}$

- ▶  $P_I(x)$  é " $\sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i \leq C$ "
- ▶ A função objetivo a ser maximizada é  $f(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$

O problema **MINQUAD**:

**Instância:** uma tripla  $(c_1, c_2, c_3)$  de coeficientes reais.

**Solução:** valor  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$  seja mínimo.

Dado  $I = (c_1, c_2, c_3)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ,

- ▶  $P_I(x)$  é " $x \in \mathbb{R}$ " (predicado sempre verdadeiro)
- ▶ função objetivo a ser minimizada é  $f(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ .