

CI1238 - Otimização

Aula 02 - Problemas Computacionais e Algoritmos

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

Problemas Computacionais e Algoritmos

Problema computacional: pode ser formulado como uma **relação**:

- ▶ entre um conjunto de entradas
- ▶ entre e um conjunto de saídas.

Nesta relação cada entrada do problema tem um conjunto de saídas associadas.

Exemplo: Considere o problema de encontrar o local onde está o elemento mínimo de um vetor:

- ▶ para cada **veto**r dado como entrada,
- ▶ as saídas válidas são os índices para elementos que são mínimos.

Problemas Computacionais e Algoritmos

Em um *problema computacional*:

- ▶ entrada: normalmente chamada de **instância** do problema
- ▶ saída: normalmente chamada de **solução** (ou **resposta**) da instância.

Problemas Computacionais e Algoritmos

MÍNIMO DE VETOR (MINV)

Instância: (v, a, b) , onde v é um vetor indexado por $[a..b]$, com $a \leq b$.

Solução: um índice $m \in [a..b]$ tal que $v[m] \leq v[i]$ para todo $i \in [a..b]$.

Se v é dado por

i	1	2	3	4	5	6	7
$v[i]$	16	23	4	42	15	8	4,

então

- ▶ $(v, 1, 7)$ é uma instância do problema Mínimo de Vetor e os números 3 e 7 são ambos soluções para esta instância.
- ▶ $(v, 4, 6)$ é uma instância do problema Mínimo de Vetor e 6 é uma solução para esta instância.

Relembrando: a terminologia “6 é uma resposta para esta instância $(v, 4, 6)$ ” é também comumente utilizada.

Problemas computacionais e algoritmos

Uma *solução de um problema computacional* é:

- ▶ um *algoritmo* que recebe uma instância qualquer do problema
- ▶ devolve uma solução para a instância.
- ▶ **Note: solução de um problema $\neq$ solução de uma instância!**

Um problema computacional pode ter diversas soluções.

Tipos de Problemas Computacionais

Problemas computacionais normalmente são classificados de acordo com o **tipo de solução** associada às suas instâncias.

- ▶ *problema de decisão*: Solução é do tipo **SIM** ou **NÃO**
- ▶ *problema de busca*: A solução é um **objeto** que satisfaça uma dada propriedade (um predicado).
- ▶ *problema de otimização*: solução é um **objeto** que satisfaça uma dada propriedade e, além disso,
maximize/minimize uma certa função objetivo.

O Problema MÍNIMO DE VETOR é de qual tipo? Problema de busca.

Exemplos de problemas

PRIMALIDADE (PRIMO)

Instância: um inteiro positivo N .

Solução: SIM se N é um número primo ou NÃO caso contrário.

Que tipo de problema é este? R: Problema de decisão.

MOCHILA (MOCHILA)

Instância: (v, w, n, C) , onde v é uma lista de n valores reais, w é uma lista de n pesos reais e C um número real (capacidade da mochila).

Solução: n -tupla $(x_0, \dots, x_{n-1})$ tal que $x_i \in \{0, 1\}$, $\sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i \leq C$ e $\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$ seja máximo.

Que tipo de problema é este? R: Problema de otimização.

Exemplos de problemas

CAIXEIRO VIAJANTE (CAIXEIRO)

Instância: Grafo completo G com n vértices e pesos positivos nas arestas

Solução: uma permutação $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_n]$ de $V(G)$ tal que

$$\sum_{i=1}^n w(\pi_i \pi_{i+1}) \text{ é mínimo. } \quad (\text{onde } i \text{ é tomado mod } n)$$

Que tipo de problema é este? R: Problema de otimização.

Note: Se G é uma instância do problema CAIXEIRO

- A solução para G é um circuito hamiltoniano de custo mínimo em G .

Exercícios

Considere os seguintes problemas:

CIRCUITO HAMILTONIANO MÍNIMO (CHM)

Instância: Grafo ponderado G com n vértices

Solução: um circuito hamiltoniano $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_n]$ de G tal que

$$\sum_{i=1}^n w(\pi_i \pi_{i+1}) \text{ é mínimo. } \quad (i \text{ é tomado mod } n)$$

CLIQUE MÁXIMA (MAXCLIQUE)

Instância: Grafo G

Solução: uma clique em G de tamanho máximo

Responda as questões abaixo:

1. Que tipo de problema são os problemas CHM e MAXCLIQUE?
2. Qual a diferença entre o problema CHM e o problema CAIXEIRO?
3. Mostre que CHM é polinomialmente redutível CAIXEIRO e vice-versa.

Exemplos de problemas (cont.)

MÍNIMO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA (MINQUAD)

Instância: uma tripla (c_1, c_2, c_3) de coeficientes reais.

Solução: valor $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ seja mínimo.

Que tipo de problema é este? R: Problema de otimização.

Formalizando Decisão, Busca e Otimização

Problemas de decisão:

Dado : entrada x

Resposta: $\exists y$ tal que certo predicado $P_x(y)$ é verdadeiro?

Problemas de busca:

Dado : entrada x

Encontre: y tal que certo predicado $P_x(y)$ é verdadeiro

Problemas de otimização:

Dado : entrada x

Encontre: y tal que certo predicado $P_x(y)$ é verdadeiro e $f_x(y)$ é máximo entre todos elementos que fazem P_x é verdadeiro

Relembrando exemplos vistos anteriormente

O problema **MOCHILA**:

Instância: (v, w, n, C) , onde v e w são listas de n valores e pesos reais, e $C \in \mathbb{R}$.

Solução: n -tupla $(x_0, \dots, x_{n-1})$, $x_i \in \{0, 1\}$, $\sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i \leq C$ e $\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$ seja máximo.

Considere a instância $I = (v, w, n, C)$

Dado $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ $x_i \in \{0, 1\}$

- ▶ $P_I(x)$ é " $\sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i \leq C$ "
- ▶ A função objetivo a ser maximizada é $f(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$

O problema **MINQUAD**:

Instância: uma tripla (c_1, c_2, c_3) de coeficientes reais.

Solução: valor $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ seja mínimo.

Dado $I = (c_1, c_2, c_3)$, para $x \in \mathbb{R}$,

- ▶ $P_I(x)$ é " $x \in \mathbb{R}$ " (predicado sempre verdadeiro)
- ▶ função objetivo a ser minimizada é $f(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$.