

CI1238 - Otimização

Aula 03 - Espaço de soluções

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

Fundamentos de Espaço de Soluções

Seja Π um problema de **busca** ou **otimização**:

- ▶ A solução para uma instância de Π : tipicamente uma n -tupla $(r_1, r_2, \dots, r_n)$

Exemplo: MOCHILA

- ▶ Dada uma instância (v, w, n, C)
- ▶ Espaço de soluções: conjunto de tuplas $[x_0, \dots, x_{n-1}]$, sendo $x_i \in \{0, 1\}$.

Definição de Espaço de Soluções de um problema Π :

- ▶ Conjunto de todas as n -tuplas (onde n depende do tamanho instância)
 - ▶ Exemplo: Para MOCHILA, n é a quantidade de itens disponíveis
- ▶ Em alguns contextos, o espaço de soluções contém todas k -tuplas, $k \leq n$
 - ▶ Exemplo: Para MAXCLIQUE, a solução é uma clique de tamanho k , $k \leq n$
- ▶ Para simplificar, quando não especificado, o espaço será o conjunto das n -tuplas

Espaço de soluções: Também chamado de **Espaço de Busca**.

Exercícios

Nas questões abaixo, G é um grafo com n vértices e v um vetor de tamanho n .

1. Se o grafo G é uma instância de CAIXEIRO, qual seria um espaço de busca para G .
2. Dada uma instância (v, a, b) de MINV, qual seria seu espaço de busca?
3. Se o grafo G é uma instância de MAXCLIQUE, qual seria um espaço de busca para G .
4. Dada uma instância (c_1, c_2, c_3) do problema MINQUAD, qual seu espaço de busca?

Soluções viáveis e função objetivo

Seja Π um problema **otimização** associado ao predicado P e a função f .

Seja U um espaço de busca de Π .

- ▶ Soluções viáveis: elementos $x \in U$ tal que $P(x)$ é verdadeiro
- ▶ **Função objetivo**: $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Ideia: função objetivo atribui um valor a cada n -tupla

- ▶ com isso a solução para uma instância de um problema de otimização é uma a **solução viável que maximize (ou minimize)** este valor.

Problemas de busca:

- ▶ Conjunto das soluções viáveis definido de maneira análoga
- ▶ Função objetivo não definida (quando conveniente, a função constante)

Exemplo: Seja um grafo G de n vértices uma instância do problema CAIXEIRO.

- ▶ Espaço de busca: conjunto de n -tuplas $[v_1, v_2, \dots, v_n]$, onde $v_i \in [1..n]$
- ▶ Soluções viáveis: Conjunto de todas as permutações sobre $[1..n]$.
- ▶ Função objetivo: Seja T^n o conjunto de n -tuplas sobre $[1..n]$
 $f: T^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(\pi_1, \dots, \pi_n) = \sum_{i=1}^n w(\pi_i \pi_{i+1})$

No caso do problema CHM, qual seria a diferença em relação a CAIXEIRO.

- ▶ Soluções viáveis: Conjunto de todos caminhos hamiltonianos de G .
- ▶ O espaço de busca e a função objetivo são iguais.

Maximização e minimização

Problema de minimização: Problemas de otimização cujas respostas tenham valor mínimo na função objetivo.

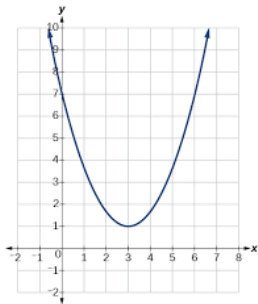
Problema de maximização: Problemas de otimização cujas respostas tenham valor máximo na função objetivo.

Modelagem de problemas

MÍNIMO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA' (MINQUAD')

Instância: uma tripla (c_1, c_2, c_3) de coeficientes reais.

Solução: ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $y = c_1x^2 + c_2x + c_3$ seja mínimo.



Assim, para este problema temos:

Espaço de busca: pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Soluções viáveis: (x, y) tal que
 $y = c_1x^2 + c_2x + c_3$

Função objetivo: $f(x, y) = c_1x^2 + c_2x + c_3$.

- Obs: função só depende de x .
- Em casos assim, **para simplificar**, escrevemos $f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$.

Espaço de Busca

Seja Π um problema de otimização com **espaço de busca** U .

Seja $S \subseteq U$ (por exemplo, S tipicamente é o conjunto das soluções viáveis)

Definição: *Vizinhança* no espaço de busca

Seja $x \in S$. Uma *vizinhança* de x em S , denotada $N_S(x)$ é

- ▶ um subconjunto de S
- ▶ definido por uma função $N_S: S \rightarrow 2^S$.
- ▶ Notação simplificada: N (ou invés de N_S)

Exemplo: Problema com soluções viáveis em $\mathbb{R}^2$

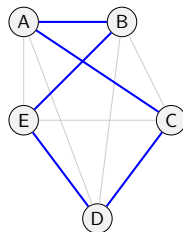
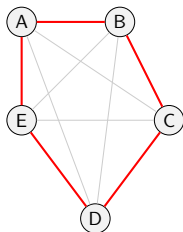
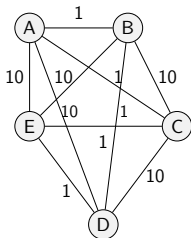
Uma vizinhança natural de $x \in \mathbb{R}^2$ pode ser a seguinte:

- ▶ Considere a distância euclidiana $d(x, y)$ para pontos de $\mathbb{R}^2$, i.e., para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Dado $\epsilon \in \mathbb{R}$, defina $N(x) = \{y \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$.

Exemplo de vizinhança em espaço combinatório

Considere o K_5 abaixo e dois de seus circuitos hamiltonianos π e π'



Um grafo K_5 com pesos

circ. hamiltoniano π

circ. hamiltoniano π'

O circuito π' é dito um *2-swap* e π

- Ideia: A partir de um circuito π , procurar algum “circuito vizinho” π' de custo menor (neste exemplo, o custo de π é 32 e o custo de π' é 23)

Exemplo de vizinhança em espaço combinatório

Considere um grafo G .

Def. (2-swap): Seja $\pi = (v_1, \dots, v_n)$ um circuito hamiltoniano de G

Escolha índices i, j respeitando $1 \leq i < j \leq n$ e $j \neq i + 1$. A permutação π' obtida por um **2-swap** de π é

$$\pi' = (v_1, \dots, v_i, v_j, v_{j-1}, \dots, v_{i+1}, v_{j+1}, \dots, v_n).$$

- Observe que π' pode não ser um circuito hamiltoniano
- Em geral estaremos interessados em circuitos hamiltonianos que são 2-swaps de outros circuitos hamiltonianos

Espaço de Busca

Exemplo: CAIXEIRO VIAJANTE

Seja G instância do problema CAIXEIRO e U um espaço de busca para G .

Seja S o conjunto de permutações sobre $V(G)$. Dado $p \in S$, um exemplo de vizinhança, conhecida como *vizinhança 2-swap*, é

$$N(p) = \{q \in S \mid q \text{ é um 2-swap de } p\}.$$

Ótimos locais e ótimos globais

Seja S um conjunto de soluções viáveis de um Problema de minimização Π

- ▶ Seja $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ a função objetivo
- ▶ Para $x \in S$, seja $N(x)$ uma vizinhança de x

Dizemos que $x \in S$ é um *mínimo local* de S se, $\forall y \in N(x)$, $f(x) \leq f(y)$.

Dizemos que $x \in S$ é um *mínimo global* de S se, para todo $y \in S$, $f(x) \leq f(y)$.

- ▶ *Máximos locais/globais*: análogos para problemas de maximização.
- ▶ *Ótimo local* e *ótimo global*: termos mais gerais.