

CI1238 - Otimização

Aula 05 - Formas equacionais e soluções básicas

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

Formas Equacionais em PL

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL):

- ▶ **Instância:** Uma tripla $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ onde A é uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbf{b}$ é um vetor sobre $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{c}$ é um vetor sobre $\mathbb{R}^n$.
- ▶ **Solução:** Um vetor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo
 - ▶ $A\mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}$,
 - ▶ $\mathbf{c}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

PROGRAMAÇÃO LINEAR NA FORMA EQUACIONAL (PLE):

- ▶ **Instância:** Uma tripla $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ onde A é uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbf{b}$ é um vetor sobre $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{c}$ é um vetor sobre $\mathbb{R}^n$.
- ▶ **Solução:** Um vetor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo
 - ▶ $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$,
 - ▶ $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$,
 - ▶ $\mathbf{c}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

Note: Apesar de chamarmos de forma “equacional”, não temos apenas equações!

Às vezes, vamos dizer “maximizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, sujeito a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ”.

Convertendo PLs em PLEs

Vamos converter o problema abaixo em um PLE:

Maximizar: $3x_1 - 2x_2$

Respeitando:

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 5$$

$$x_2 \geq 0$$

- ▶ Vamos converter a desigualdade $2x_1 - x_2 \leq 4$ em uma equação:
 - ▶ Crie uma **variável nova** x_3 ; crie também a restrição $x_3 \geq 0$
 - ▶ Troque a desigualdade original pela equação $2x_1 - x_2 + x_3 = 4$
 - ▶ x_3 é chamada de *variável de folga* (não aparece outras equações)
- ▶ Para $x_1 + 3x_2 \geq 5$:
 - ▶ Multiplique por (-1) ; Crie variável de folga x_4
 - ▶ De maneira semelhante, obtenha $-x_1 - 3x_2 + x_4 = -5$
- ▶ Lidando com a variável x_1 (originalmente não tem restrição ≥ 0)
 - ▶ Crie variáveis novas y_1 e z_1 com restrições $y_1 \geq 0$ e $z_1 \geq 0$
 - ▶ Substitua x_1 por $y_1 - z_1$
 - ▶ Importante: x_1 deixa de existir!
(note: x_1 pode ser recuperada a partir de $y_1 - z_1$)

Convertendo PLs em PLEs

Recapitulando:

Maximizar: $3x_1 - 2x_2$

Respeitando:

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 5$$

$$x_2 \geq 0$$

Obtemos o PLE:

Maximizar: $3y_1 - 3z_1 - 2x_2$

Respeitando:

$$2y_1 - 2z_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$-y_1 + z_1 - 3x_2 + x_4 = -5$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, y_1 \geq 0, z_1 \geq 0$$

Para organizar as coisas, normalmente renomeamos as variáveis para x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

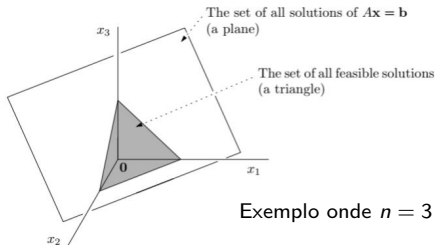
- ▶ Se PL original tinha n variáveis e m restrições
- ▶ O PLE resultante tem no máximo $m + 2n$ variáveis e m equações (além disso, temos também as restrições de não negatividade)

Interpretação Geométrica de PLEs

Considere o problema de maximizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, sujeito a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

- ▶ Vamos olhar apenas para $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$: As soluções deste sistema de equações estão em um subespaço F do espaço $\mathbb{R}^n$
- ▶ Agora levando em conta as restrições do tipo $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$: Soluções viáveis do PLE estão na intersecção de F com o ortante não negativo de $\mathbb{R}^n$ (pontos em que todos componentes da tupla são ≥ 0)

(obs: **ortante** é a generalização de quadrante (2D), octante (3D), etc...)

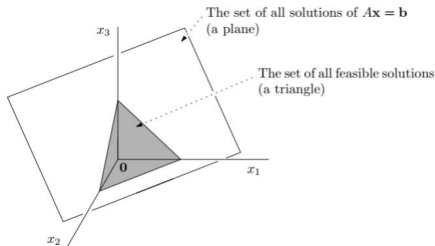


Exemplo onde $n = 3$ e $m = 1$

- ▶ Soluções viáveis do PLE são delimitadas por um tipo particular de polítopo (note que na interpretação geométrica do PL original o polítopo pode ser outro)
 - ▶ Note: no PLE do exemplo a equação é equivalente a duas desigualdades e os planos x_1/x_2 , x_1/x_3 e x_2/x_3 definem outras três desigualdades

Interpretação Geométrica de PLEs

PLE: maximizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, sujeito a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

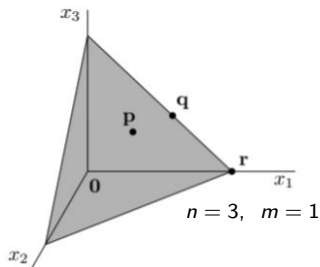


- ▶ Como vimos, soluções do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ podem ter componentes negativos, mas as **soluções viáveis do PLE** satisfazendo este sistema são não negativas.
- ▶ Estratégia que vamos usar: alterar o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando via transformações que preservam soluções (e.g., operações de eliminação gaussiana):
 - ▶ Com isso, **soluções viáveis do PLE (incl. ótimas)** continuam as mesmas
 - ▶ O Algoritmo Simplex usa isso extensivamente
- ▶ Assumimos: (1) PLEs tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tenha pelo menos uma solução;
(2) As m linhas de $\mathbf{A}$ são l.i.
 - ▶ (1) Fácil checar usando elim. gaussiana; (2) Descartar linhas se necessário

Soluções Viáveis Básicas

- **Soluções básicas:** soluções viáveis que estão nos vértices do politopo

Considere as soluções viáveis p , q e r do exemplo anterior



- Destas soluções viáveis, apenas r é uma solução viável **básica**.
 - Isso pode ser formalizado como sendo uma solução com uma quantidade “suficientemente grande” de coordenadas em zero.
(neste exemplo, duas coordenadas iguais a zero)

Soluções Viáveis Básicas

Lembrando: A tem n colunas e m linhas linearmente independentes i.e., $\text{rank}(A) = m$

Notação: Para $B \subseteq \{1..n\}$, denotamos por A_B a matriz com as colunas de A indexadas por B . A mesma notação vale para vetores.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \{2, 4\}$, então

$$A_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Se $x = (3, 5, 7, 9, 11)$ e $B = \{2, 4\}$, então

$$x_B = (5, 9)$$

Soluções Viáveis Básicas

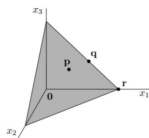
Digamos que a matriz A do exemplo do slide anterior venha do sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{aqui 3 das 5 variáveis podem ser zero}$$

► Escolhendo $B = \{2, 4\}$, temos $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$ aqui $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é solução

Portanto $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma solução do sistema original

Exemplo do livro:



No exemplo tínhamos apenas uma equação:
 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

Ou seja, dada $A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$ queremos um $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tal que $A\mathbf{x} = b$

e.g., o conjunto $B = \{1\}$, “escolhe” apenas a primeira linha da matriz i.e. $A_B = (a_1)$

► podemos fazemos $x_2 = 0, x_3 = 0$ e aí encontrar x_1 tal que $(a_1)(x_1) = (b)$
(obs: de acordo com o desenho x_1 deve ser r)

Soluções Viáveis Básicas

Def.: Uma **solução viável básica** de um PLE em que queremos **maximizar** $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, **sujeito a** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ é uma solução viável $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que exista um conjunto $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ contendo m elementos satisfazendo

- ▶ A matriz A_B é não singular (i.e., as colunas indexadas por B são l.i.)
- ▶ $x_j = 0$ para todo $j \notin B$.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \{14, 7\}$.

Então $\mathbf{x} = (0, 2, 0, 1, 0)$ é uma **solução viável básica** com $B = \{2, 4\}$.

- ▶ Uma vez fixado B , cada x_j , $j \in B$, é chamada de **variável básica**.
 - ▶ No exemplo acima x_2 e x_4 são variáveis básicas.
- ▶ Note que o vetor $\mathbf{c}$ é irrelevante nesta definição.
 - ▶ Ou seja, as soluções básicas viáveis dependem somente de A e $\mathbf{b}$.

Soluções Viáveis Básicas

Proposição: Uma solução básica é unicamente determinada por B

Ou seja, para cada $B \in [1..n]$, com A_B não singular, existe no máximo uma solução viável $x \in \mathbb{R}^n$, com $x_j = 0$ para todo $j \notin B$ [veja MAT07: Prop. 4.2.2]

- chamamos B de base viável

Teorema: Considere o problema maximizar $c^T x$, sujeito a $Ax = b$, $x \geq 0$.

- 1 Se existe pelo menos uma solução viável e a função objetivo é limitada superiormente no conjunto de soluções viáveis, então existe solução ótima
- 2 Se existe solução ótima, então uma solução básica é ótima.

[veja MAT07: Teo. 4.2.3]

- Um algoritmo natural: tente todos os $\binom{n}{m}$ conjuntos B .
- Algoritmo Simplex: navega apenas pelas soluções básicas indo “em direção” a solução ótima. (obs: a corretude do Simplex prova o Teorema)