

CI1238 - Otimização

Aula 06 - Algoritmo Simplex

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

Introdução ao Simplex com um exemplo

Considere o PL

Maximizar: $x_1 + x_2$

Respeitando:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primeiro vamos obter o PLE equivalente:

Maximizar: $x_1 + x_2$

Respeitando:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 2 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = (1, 1)$$

Introdução ao Simplex com um exemplo

Maximizar: $x_1 + x_2$

Respeitando:

$$\begin{array}{rclcl} -x_1 + x_2 + x_3 & & & & = 1 \\ x_1 & & +x_4 & & = 3 \\ & x_2 & & +x_5 & = 2 \\ x_1, \dots, x_5 & \geq & 0 & & \end{array}$$

- ▶ Como dito anteriormente, vamos manipular o sistema $Ax = b$, mas tomando cuidado para que as soluções viáveis continuem as mesmas
- ▶ Para fins de organização, vamos colocar as equações no seguinte *tableau*:

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 2 & & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & + x_2 \end{array}$$

- ▶ Parte de cima: restrições; Parte de baixo: z é o valor da função objetivo
- ▶ Conseguem enxergar uma solução viável “óbvia” a partir do tableau?
 - ▶ Faça as variáveis do lado direito valerem zero: $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$
A partir daí, obtemos $x_3 = 1 \quad x_4 = 3 \quad x_5 = 2$
- ▶ Com isso já temos uma *solução viável* $x = (0, 0, 1, 3, 2)$ para começar!
Obs: Nem sempre será possível obter uma solução viável “óbvia” assim
 - ▶ Mas isto é um problema para outro momento!

Introdução ao Simplex com um exemplo

Maximizar: $x_1 + x_2$

Respeitando:

$$\begin{array}{rclcl} -x_1 + x_2 + x_3 & & & & = 1 \\ x_1 & & +x_4 & & = 3 \\ & x_2 & & +x_5 & = 2 \\ x_1, \dots, x_5 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Tableau equivalente:

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 2 & & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & + x_2 \end{array}$$

- ▶ Parte de cima: restrições; Parte de baixo: z é o valor da função objetivo
- ▶ Como vimos, o tableau acima é associado à solução básica $x = (0, 0, 1, 3, 2)$
 - ▶ *Tableau: associado à solução básica* (solução com variáveis do lado direito iguais a 0)
 - ▶ Na última linha, z é o valor da função objetivo para esta solução básica
Aqui a função objetivo começa valendo $z = 0$
- ▶ Estratégia: A partir do tableau inicial, obter novos tableaux equivalentes
 - ▶ i.e., tableaux que representam o mesmo PLE
 - ▶ mas que estejam associados a outras soluções básicas deste PLE

Introdução ao Simplex com um exemplo

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 2 & & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & + x_2 \end{array}$$

- ▶ Conseguimos obter uma solução melhor que $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 3, 2)$?
 - ▶ Vamos tentar encontrar uma outra solução associada a outro *tableau*
 - ▶ Mas neste momento, vamos primeiramente tentar entender como seria uma solução melhor. Depois veremos como obter outro *tableau*
- ▶ Vamos **incrementar o valor de alguma variável da função objetivo**, e.g. x_2 . Mais precisamente, queremos uma solução com x_2 valendo mais que zero
- ▶ Conseguimos incrementar arbitrariamente o valor de x_2 ?

Note: De acordo com as equações 1 e 3, quando o valor de x_2 é incrementado, o valor x_3 e x_5 são decrementados.
- ▶ Lembrando que todas variáveis são ≥ 0 , o “gargalo” é a primeira equação

Introdução ao Simplex com um exemplo

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 2 & & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & + x_2 \end{array}$$

A partir de $(0, 0, 1, 3, 2)$, aumentaremos x_2 para o maior valor possível

- ▶ O máximo viável neste passo é fazer $x_2 = 1$
 - ▶ Com isso, pela primeira equação, x_3 deve ser 0
- Ideia chave:** x_2 passa a ser var. básica e x_3 deixa de ser (“trocam de papel”)
Demais variáveis não trocam de papel (x_4, x_5 continuam básicas e x_1 continua não básica)

Ou seja, na nova solução temos: $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$ $x_4 = ?$ $x_5 = ?$

- ▶ As demais equações (que não são gargalo) nos dão os valores x_4 e x_5 :
 - ▶ Da segunda equação: $x_4 = 3 - x_1 \therefore x_4 = 3 - 0 \therefore x_4 = 3$
 - ▶ Da terceira equação $x_5 = 2 - x_2 \therefore x_5 = 1$

Qual é o novo tableau associado a esta nova solução $(0, 1, 0, 3, 1)$?

$$\begin{array}{rclcl} x_2 & = & 1 & + x_1 & - x_3 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 1 & - x_1 & + x_3 \\ \hline z & = & 1 & + 2x_1 & - x_3 \end{array}$$

- ▶ Na equação “gargalo” apenas isolamos a nova variável não básica (troca de papel)
- ▶ Nas demais (incl. função objetivo), substituímos x_2 por $1 + x_1 - x_3$

O processo de obter um novo tableau é chamado de **pivoteamento**.

Introdução ao Simplex com um exemplo

$$\begin{array}{rclcl} x_2 & = & 1 & + x_1 & - x_3 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 1 & - x_1 & + x_3 \\ \hline z & = & 1 & + 2x_1 & - x_3 \end{array}$$

$$B = \{2, 4, 5\} \quad \mathbf{x} = (0, 1, 0, 3, 1) \quad z = 1$$

- ▶ Vamos incrementar x_1 ; Gargalo: terceira equação
 - ▶ Com isso, x_1 e x_5 “trocam de papel”
 - ▶ Novo tableau: Terceira linha será substituída por $x_1 = 1 + x_3 - x_5$
 - ▶ Outras linhas: trocamos x_1 por $1 + x_3 - x_5$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 1 & + x_3 & - x_5 \\ x_2 & = & 2 & & - x_5 \\ x_4 & = & 2 & - x_3 & + x_5 \\ \hline z & = & 3 & + x_3 & - 2x_5 \end{array}$$

$$B = \{1, 2, 4\} \quad \mathbf{x} = (1, 2, 0, 2, 0) \quad z = 3$$

- ▶ Podemos incrementar x_3 ; Gargalo: terceira equação; Novo tableau abaixo:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 3 & - x_4 & \\ x_2 & = & 2 & & - x_5 \\ x_3 & = & 2 & - x_4 & + x_5 \\ \hline z & = & 5 & - x_4 & - x_5 \end{array}$$

$$B = \{1, 2, 3\} \quad \mathbf{x} = (3, 2, 2, 0, 0) \quad z = 5$$

Introdução ao Simplex com um exemplo

Solução obtida:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 3 & - x_4 & \\ x_2 & = & 2 & & - x_5 \\ x_3 & = & 2 & - x_4 & + x_5 \\ \hline z & = & 5 & - x_4 & - x_5 \end{array}$$

$$B = \{1, 2, 3\} \quad \mathbf{x} = (3, 2, 2, 0, 0) \quad z = 5$$

- ▶ Lembrando que os tableaux são diferentes, mas representam o mesmo PLE
- ▶ Pela equação da última linha **qualquer solução** $\mathbf{x}$ deve respeitar
 - ▶ $z = 5 - x_4 - x_5$
- ▶ A equação acima junto com a não negatividade de x_4 e x_5 implica em $z \leq 5$
- ▶ Logo, atingimos o **maior valor possível para z**

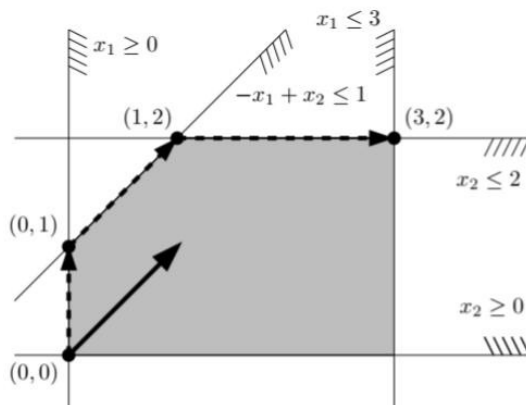
Introdução ao Simplex com um exemplo

Solução obtida:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & = & 3 & - x_4 & \\
 x_2 & = & 2 & & - x_5 \\
 x_3 & = & 2 & - x_4 & + x_5 \\
 \hline
 z & = & 5 & - x_4 & - x_5
 \end{array}$$

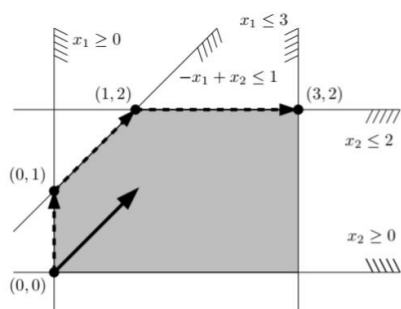
$$B = \{1, 2, 3\} \quad \mathbf{x} = (3, 2, 2, 0, 0) \quad z = 5$$

Interpretação geométrica (no PL original): algoritmo percorre vértices do polígono



Mais detalhes no próximo slide:

Interpretação geométrica em mais detalhes:



Max: $x_1 + x_2$

$$\begin{array}{lcl}
 -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\
 x_1 & \leq & 3 \\
 x_2 & \leq & 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 & \geq & 0 \\
 x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Max: $x_1 + x_2$

$$\begin{array}{rclcl}
 -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\
 x_1 & + x_4 & = & 3 \\
 x_2 & + x_5 & = & 2
 \end{array}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\
 x_4 & = & 3 & - x_1 & \\
 x_5 & = & 2 & & - x_2 \\
 \hline
 z & = & 0 & + x_1 & + x_2
 \end{array}$$

$$B = \{3, 4, 5\} \quad \mathbf{x} = (0, 0, 1, 3, 2)$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & = & 1 & + x_3 & - x_5 \\
 x_2 & = & 2 & & - x_5 \\
 x_4 & = & 2 & - x_3 & + x_5 \\
 \hline
 z & = & 3 & + x_3 & - 2x_5
 \end{array}$$

$$B = \{1, 2, 4\} \quad \mathbf{x} = (1, 2, 0, 2, 0)$$

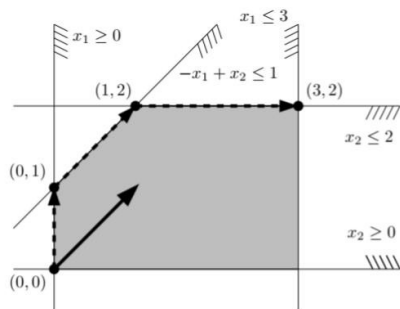
$$\begin{array}{rclcl}
 x_2 & = & 1 & + x_1 & - x_3 \\
 x_4 & = & 3 & - x_1 & \\
 x_5 & = & 1 & - x_1 & + x_3 \\
 \hline
 z & = & 1 & + 2x_1 & - x_3
 \end{array}$$

$$B = \{2, 4, 5\} \quad \mathbf{x} = (0, 1, 0, 3, 1)$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & = & 3 & - x_4 & \\
 x_2 & = & 2 & & - x_5 \\
 x_3 & = & 2 & - x_4 & + x_5 \\
 \hline
 z & = & 5 & - x_4 & - x_5
 \end{array}$$

$$B = \{1, 2, 3\} \quad \mathbf{x} = (3, 2, 2, 0, 0)$$

Interpretação geométrica em mais detalhes:



Max: $x_1 + x_2$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad \textcircled{1}$$

$$x_1 \leq 3 \quad \textcircled{2}$$

$$x_2 \leq 2 \quad \textcircled{3}$$

$$x_1 \geq 0 \quad \textcircled{4}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \textcircled{5}$$

Max: $x_1 + x_2$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_4 = 3$$

$$x_2 + x_5 = 2$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Um vértice no desenho: corresponde à duas duas equações (intersecção de duas retas)
os vértices $A = (0,0)$ e $B = (0,1)$ são vizinhos: tem uma equação em comum

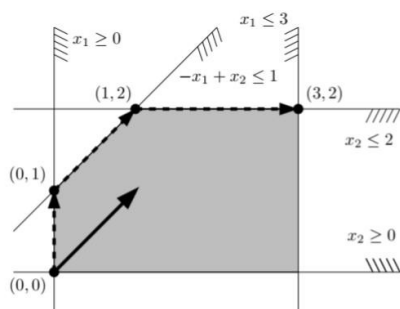
Mais precisamente,

Vértice A : equações $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$

Vértice B : equações $\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ (vizinhos, pois tem equação $\textcircled{4}$ em comum)

O que aconteceu para sairmos de A ir para B ?

Interpretação geométrica em mais detalhes:



Max: $x_1 + x_2$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad \textcircled{1}$$

$$x_1 \leq 3 \quad \textcircled{2}$$

$$x_2 \leq 2 \quad \textcircled{3}$$

$$x_1 \geq 0 \quad \textcircled{4}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \textcircled{5}$$

Max: $x_1 + x_2$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_4 = 3$$

$$x_2 + x_5 = 2$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & \\ x_5 & = & 2 & & - x_2 \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & + x_2 \end{array}$$

$$B = \{3, 4, 5\} \quad x = (0, 0, 1, 3, 2)$$

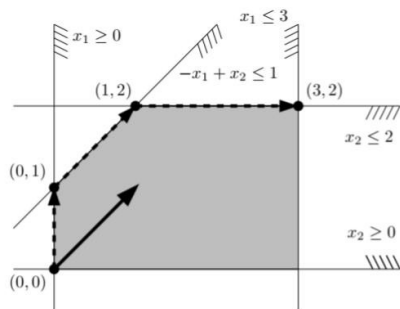
Vértice A : Duas equações “apertadas”
i.e., vale a igualdade: equações $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$

Equação escolhida p/ “afrouxar”: $\textcircled{5}$
i.e., novo ponto deixará equação $\textcircled{5}$

Aumenta valor de x_2 : Afrouxa equação
até chegar em vértice vizinho

Anda na reta da equação $\textcircled{4}$ até gargalo:
dado pela equação não comum aos dois
vértices: eq. $\textcircled{1}$

Interpretação geométrica em mais detalhes:



Max: $x_1 + x_2$

Max: $x_1 + x_2$

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \leq & 1 \quad \textcircled{1} \\ x_1 & \leq & 3 \quad \textcircled{2} \\ x_2 & \leq & 2 \quad \textcircled{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_4 & = & 3 \\ x_2 + x_5 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \quad \textcircled{4} \\ x_2 & \geq & 0 \quad \textcircled{5} \end{array}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 2 - x_2 \\ \hline z & = & 0 + x_1 + x_2 \end{array}$$

$$B = \{3, 4, 5\} \quad \mathbf{x} = (0, 0, 1, 3, 2)$$

⇓

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 1 + x_1 - x_3 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 1 - x_1 + x_3 \\ \hline z & = & 1 + 2x_1 - x_3 \end{array}$$

$$B = \{2, 4, 5\} \quad \mathbf{x} = (0, 1, 0, 3, 1)$$

Vértice A: Duas equações “apertadas”
i.e., vale a igualdade: equações ④, ⑤

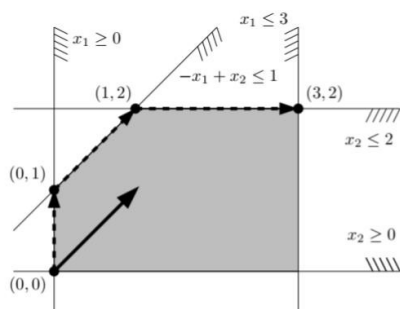
Equação escolhida p/ “afrouxar”: ⑤
i.e., novo ponto deixará equação ⑤

Aumenta valor de x_2 : Afrouxa equação
até chegar em vértice vizinho

Anda na reta da equação ④ até gargalo:
dado pela equação não comum aos dois
vértices: eq. ①

Novo vértice: $B = (0, 1)$ (eq. ①, ④)

Interpretação geométrica em mais detalhes:



Max: $x_1 + x_2$

Max: $x_1 + x_2$

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \leq & 1 \quad \textcircled{1} \\ x_1 & \leq & 3 \quad \textcircled{2} \\ x_2 & \leq & 2 \quad \textcircled{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_4 & = & 3 \\ x_2 + x_5 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \quad \textcircled{4} \\ x_2 & \geq & 0 \quad \textcircled{5} \end{array}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 1 + x_1 - x_3 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 1 - x_1 + x_3 \\ \hline z & = & 1 + 2x_1 - x_3 \end{array}$$

$$B = \{2, 4, 5\} \quad \mathbf{x} = (0, 1, 0, 3, 1)$$

⇓

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 + x_3 - x_5 \\ x_2 & = & 2 - x_5 \\ x_4 & = & 2 - x_3 + x_5 \\ \hline z & = & 3 + x_3 - 2x_5 \end{array}$$

$$B = \{1, 2, 4\} \quad \mathbf{x} = (1, 2, 0, 2, 0)$$

Vértice B: Duas equações “apertadas”
i.e., vale a igualdade: equações ①, ④

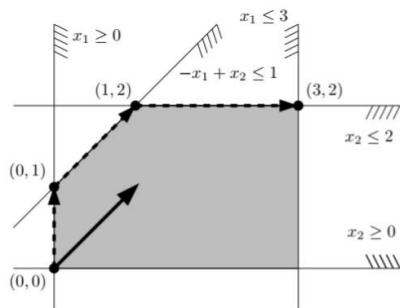
Equação escolhida p/ “afrouxar”: ④
i.e., novo ponto deixará equação ④

Aumenta valor de x_1 : Afrouxa equação
até chegar em vértice vizinho
(obs: x_2 aumenta junto)

Anda na reta da equação ① até gargalo:
dado pela equação não comum aos dois
vértices: eq. ③

Novo vértice: $C = (1, 2)$ (eq. ①, ③)

Interpretação geométrica em mais detalhes:



Max: $x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 & \textcircled{1} \\ x_1 &\leq 3 & \textcircled{2} \\ x_2 &\leq 2 & \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 & \textcircled{4} \\ x_2 &\geq 0 & \textcircled{5} \end{aligned}$$

Max: $x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 1 & + x_3 & - x_5 \\ x_2 & = & 2 & & - x_5 \\ x_4 & = & 2 & - x_3 & + x_5 \\ \hline z & = & 3 & + x_3 & - 2x_5 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = (1, 2, 0, 2, 0)$$

⇓

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 3 & - x_4 & \\ x_2 & = & 2 & & - x_5 \\ x_3 & = & 2 & - x_4 & + x_5 \\ \hline z & = & 5 & - x_4 & - x_5 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = (3, 2, 2, 0, 0) \quad \text{solução ótima!}$$

Vértice C: Duas equações “apertadas”
i.e., vale a igualdade: equações ①, ③

Equação escolhida p/ “afrouxar”: ①
i.e., novo ponto deixará equação ①

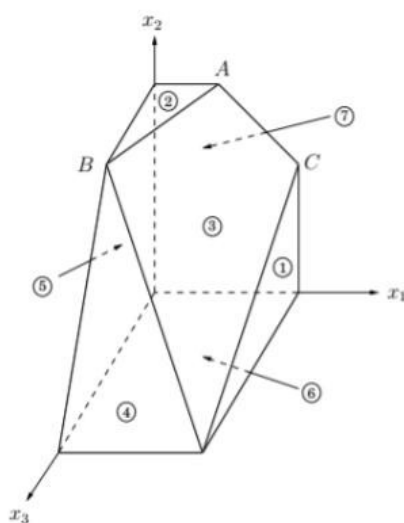
Aumenta valor de x_3 : Afrouxa equação
até chegar em vértice vizinho
(obs: x_1 aumenta junto)

Anda na reta da equação ③ até gargalo:
dado pela equação não comum aos dois
vértices: eq. ②

Novo vértice: $\mathcal{D} = (3, 2)$ (eq. ①, ②)

Interpretação geométrica com mais variáveis

Exemplo em [DPV06]:



$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 6x_2 + 13x_3 \\ & x_1 \leq 200 & \textcircled{1} \\ & x_2 \leq 300 & \textcircled{2} \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 400 & \textcircled{3} \\ & x_2 + 3x_3 \leq 600 & \textcircled{4} \\ & x_1 \geq 0 & \textcircled{5} \\ & x_2 \geq 0 & \textcircled{6} \\ & x_3 \geq 0 & \textcircled{7} \end{aligned}$$

- ▶ Para três variáveis, vértices são definidos por três equações (três planos)
- ▶ Vértice $\mathcal{A}$ é vizinho de $\mathcal{C}$, pois tem dois planos em comum
 - ▶ Vértice $\mathcal{A}$: ②, ③, ⑦
 - ▶ Vértice $\mathcal{C}$: ①, ③, ⑦

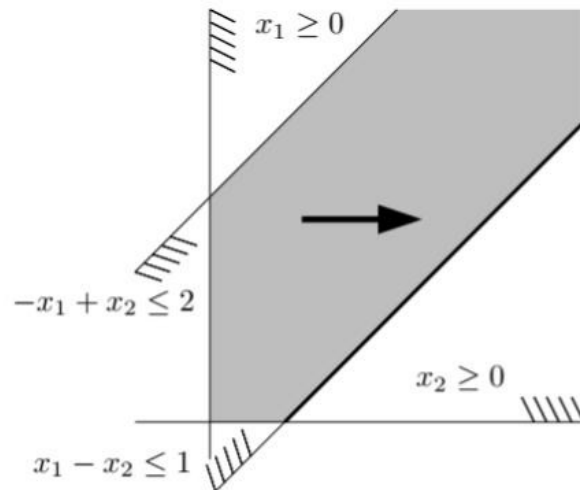
Lidando com espaço de soluções viáveis ilimitado

Maximizar: x_1

Respeitando:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Interpretação geométrica deste PL:



Lidando com espaço de soluções viáveis ilimitado

Maximizar: x_1

Respeitando:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Convertendo o PL em PLE:

Maximizar: x_1

Respeitando:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Vamos começar com o seguinte tableau inicial:

(obs: ainda estamos ignorando como obter este tableau)

$$\begin{array}{rcll}x_3 & = & 1 & -x_1 + x_2 \\ x_4 & = & 2 & +x_1 - x_2 \\ \hline z & = & 0 & +x_1\end{array}$$

$$B = \{3, 4\} \quad \mathbf{x} = (0, 0, 1, 2) \quad z = 0$$

Lidando com espaço de soluções viáveis ilimitado

$$\begin{array}{rclclcl} x_3 & = & 1 & - x_1 & + x_2 & \\ x_4 & = & 2 & + x_1 & - x_2 & \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & & \end{array}$$

$$B = \{3, 4\} \quad \mathbf{x} = (0, 0, 1, 2) \quad z = 0$$

- ▶ Pivoteando uma vez, com x_1 e x_3 trocando de papel, temos:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & = & 1 & + x_2 & - x_3 & \\ x_4 & = & 3 & & - x_3 & \\ \hline z & = & 1 & + x_2 & - x_3 & \end{array}$$

$$B = \{1, 4\} \quad \mathbf{x} = (1, 0, 0, 3) \quad z = 1$$

- ▶ Escolhemos agora x_2 para entrar na base
- ▶ Não existe gargalo! Podemos aumentar o valor de x_2 arbitrariamente!
- ▶ $\forall t \geq 0, (1 + t, t, 0, 3)$ é solução (não necessariamente básica)

O conjunto $\{(1, 0, 0, 3) + (1, 1, 0, 0) : t \geq 0\}$ é sempre viável

Obs: A semi-reta (do PL original) está em destaque na figura anterior

- ▶ O Simplex retorna esta semi-reta em tais casos

Lidando com soluções degeneradas

Maximizar: x_2

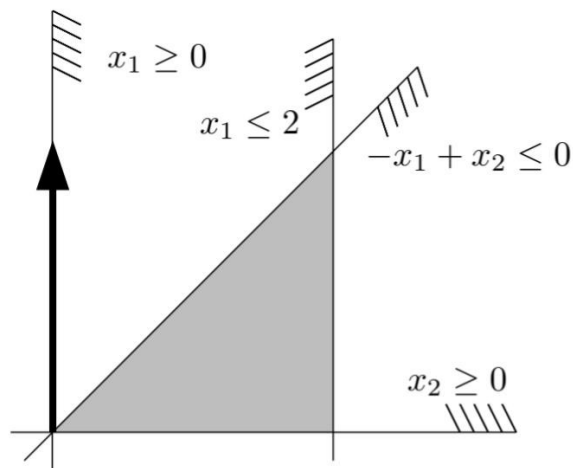
Respeitando:

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Interpretação geométrica deste PL:



Lidando com soluções degeneradas

PLE equivalente:

Maximizar: x_2

Respeitando:

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Começamos com o seguinte tableau:

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 0 & + x_1 & - x_2 \\ x_4 & = & 2 & - x_1 & \\ \hline z & = & 0 & & + x_2 \end{array}$$

$$B = \{3, 4\} \quad \mathbf{x} = (0, 0, 0, 2) \quad z = 0$$

- ▶ Única candidata a entrar na base: x_2
- ▶ Gargalo: linha 1; Não há como incrementar x_2 , mas a solução não é ótima
- ▶ Ainda assim, vamos fazer esse pivoteamento **degenerado** trocando x_2 e x_3 .

$$\begin{array}{rclcl} x_2 & = & 0 & + x_1 & - x_3 \\ x_4 & = & 2 & - x_1 & \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & - x_3 \end{array}$$

$$B = \{2, 4\} \quad \mathbf{x} = (0, 0, 0, 2) \quad z = 0$$

Note: Mesma solução básica

Lidando com soluções degeneradas

$$\begin{array}{rclcl} x_2 & = & 0 & + x_1 & - x_3 \\ x_4 & = & 2 & - x_1 & \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & - x_3 \end{array}$$

$$B = \{2, 4\} \quad \mathbf{x} = (0, 0, 0, 2) \quad z = 0$$

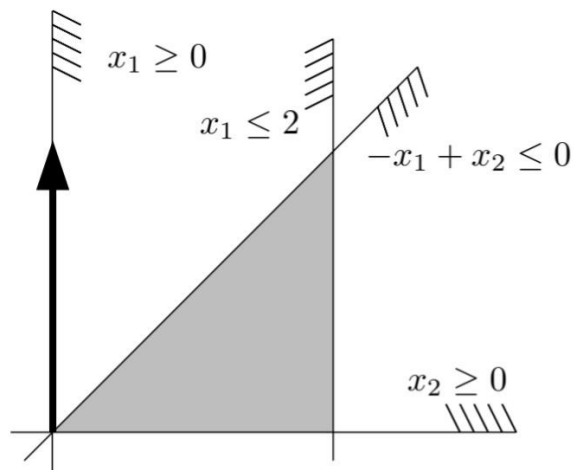
Pivoteamento: trocamos x_4 por x_1

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 2 & & - x_4 \\ x_2 & = & 2 & - x_3 & - x_4 \\ \hline z & = & 2 & - x_3 & - x_4 \end{array}$$

$$B = \{1, 2\} \quad \mathbf{x} = (2, 2, 0, 0) \quad z = 2 \quad \text{solução ótima}$$

- ▶ Pivoteamento degenerado (como no slide anterior): ocorrem em *PL degenerados* (soluções básicas com mais de uma base correspondente)
- ▶ Neste exemplo: Bastou um pivoteamento degenerado e já voltamos a fazer progresso, mas este não é o caso geral
- ▶ Podemos precisar de vários pivoteamentos degenerados para conseguir progredir
⇒ Podemos até ficar “ciclando infinitamente”
- ▶ Existem **regras de pivoteamento** para evitar isso
⇒ Regra de Bland: Variável de menor índice disponível entra na base (idem para variável que entra)

Soluções degeneradas: interpretação geométrica

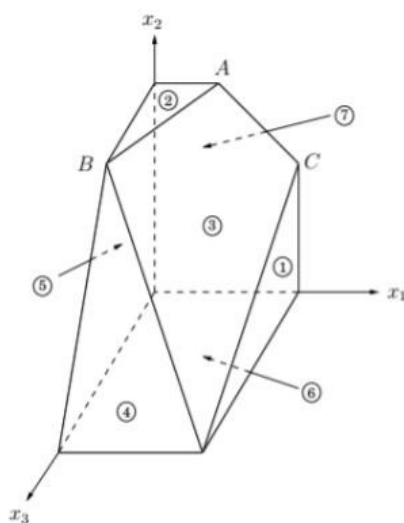


- Três equações passam em um único ponto (neste caso, a origem)

Aqui três pares de equações tem intersecção na origem

Soluções degeneradas: interpretação geométrica

Exemplo em [DPV06]:



$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 6x_2 + 13x_3 \\ & x_1 \leq 200 & \textcircled{1} \\ & x_2 \leq 300 & \textcircled{2} \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 400 & \textcircled{3} \\ & x_2 + 3x_3 \leq 600 & \textcircled{4} \\ & x_1 \geq 0 & \textcircled{5} \\ & x_2 \geq 0 & \textcircled{6} \\ & x_3 \geq 0 & \textcircled{7} \end{aligned}$$

- Quatro equações passam em um único ponto (quatro planos passam em B)

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

Considere o seguinte caso particular de PLE:

$$\text{maximizar } \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \text{ sujeito a } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{com } \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

- ▶ Obs: Coincidentemente, até agora sempre estávamos lidando com o caso $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (caso contrário, bastaria multiplicar equações por -1)
- ▶ Supondo que $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, a variável de folga de cada equação é a que entra na base viável inicial.
 - ▶ Se não houver variáveis de folga, veremos depois o que fazer!

Relembrando os exemplos anteriores

Primeiro exemplo visto:

Maximizar: $x_1 + x_2$

Respeitando:

$$\begin{array}{rclcl} -x_1 + x_2 + x_3 & & & & = 1 \\ x_1 & & + x_4 & & = 3 \\ & x_2 & & + x_5 & = 2 \\ x_1, \dots, x_5 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Começamos com o *tableau*:

$$\begin{array}{rclclcl} x_3 & = & 1 & + x_1 & - x_2 & \\ x_4 & = & 3 & - x_1 & & \\ x_5 & = & 2 & & - x_2 & \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & + x_2 & \end{array}$$

- ▶ Note que as **variáveis de folga** foram as que começaram na base

Relembrando os exemplos anteriores

No exemplo do espaço de soluções viáveis ilimitado:

Maximizar: x_1

Respeitando:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

Começamos com o *tableau*:

$$\begin{array}{rclclcl}x_3 & = & 1 & - x_1 & + x_2 & \\x_4 & = & 2 & + x_1 & - x_2 & \\ \hline z & = & 0 & + x_1 & & \end{array}$$

- Aqui também temos as variáveis de folga começando na base

Relembrando os exemplos anteriores

No exemplo do PL degenerado:

Maximizar: x_2

Respeitando:

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 &+ x_4 = 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Começamos com o *tableau*:

$$\begin{array}{rclclcl}x_3 & = & 0 & + x_1 & - x_2 & \\x_4 & = & 2 & - x_1 & & \\ \hline z & = & 0 & & + x_2 & \end{array}$$

- Variáveis de folga também começaram na base

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

Considere agora o PLE:

Maximizar: $x_1 + 2x_2$

Respeitando:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Quais variáveis colocaremos na base?

- Qual seria uma solução básica viável? Ou mesmo, uma solução viável?
- Vamos tentar $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

Pelo menos é não negativa! Mas não é solução viável!

- Ideia: incluir mais variáveis: **variáveis de correção**

Suponha que $x_1 + 3x_2 + x_3$ não seja 4 (i.e., solução não é viável)

Quanto faltou? Crie x_4 para guardar esse valor.

Mesma coisa para $2x_2 + x_3$: Crie variável de correção x_5 .

- Só isso? Não, precisamos de mais algumas coisas...

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

Considere agora o PLE:

Maximizar: $x_1 + 2x_2$

Respeitando:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Adicionando **variáveis de correção** e criando outra **função objetivo**

Maximizar: $-x_4 - x_5$

Respeitando:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

- Note: Neste PLE a função objetivo vale no máximo 0. Mas pode valer menos. Duas possibilidades para o ótimo:
- Se é 0, note que $x_4 = 0$ e $x_5 = 0$
Com isso, o valor das demais variáveis nos dão a solução inicial do PLE original
- Se é menor que 0, então não há solução viável para PL original!
 $x_1 + 3x_2 + x_3 + 0$ nunca vale 4 e $2x_2 + x_3 + 0$ nunca vale 2 (ao mesmo tempo)
- Vamos agora resolver o **PLE auxiliar** acima e ver o que acontece

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

Maximizar: $-x_4 - x_5$

Respeitando:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

$$2x_2 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

- ▶ Agora variáveis de correção fazem o papel das variáveis de folga na “estratégia” usada nas outras vezes para ter solução inicial.

(Obs: aqui temos $b \geq 0$; mas aqui poderíamos mudar o sinal da variável de correção se necessário)

$$\begin{array}{rclclcl} x_4 & = & 4 & +x_1 & -3x_2 & -x_3 \\ x_5 & = & 2 & & -2x_2 & -x_3 \\ \hline z & = & -6 & +x_1 & +5x_2 & +2x_3 \end{array}$$

$$B = \{4, 5\} \quad \mathbf{x} = (0, 0, 0, 4, 2) \quad z = -6$$

- ▶ Fazendo dois pivoteamentos chegamos a

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & = & 2 & -x_2 & -x_4 & +x_5 \\ x_3 & = & 2 & -2x_2 & & -x_5 \\ \hline z & = & & -x_4 & & -x_5 \end{array}$$

$$B = \{1, 3\} \quad \mathbf{x} = (2, 0, 2, 0, 0) \quad z = 0$$

Lidando com inviabilidade e encontrando solução inicial

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & = & 2 & -x_2 & -x_4 & +x_5 \\ x_3 & = & 2 & -2x_2 & & -x_5 \\ \hline z & = & & -x_4 & & -x_5 \end{array}$$

$$B = \{1, 3\} \quad \mathbf{x} = (2, 0, 2, 0, 0) \quad z = 0$$

- ▶ Neste caso, temos $x_4 = x_5 = 0$, portanto a solução inicial para PLE original é:

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 2)$$

- ▶ De fato, podemos obter o tableau inicial do PLE original da seguinte maneira:
 - ▶ Elimine as colunas de x_4 e x_5
 - ▶ Escrever z em função de variáveis não básicas (no caso, apenas x_2)

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 - x_2 \\ x_3 & = & 2 - 2x_2 \\ \hline z & = & 2 + x_2 \end{array}$$

- ▶ Pivoteando uma vez apenas o tableau acima, encontramos a solução.

Simplex (caso geral)

1. Converta o PL em PLE se necessário:

maximizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, s.a. $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ n variáveis, m equações, A tem rank m

2. Se não há solução viável "óbvia", obtenha o PL auxiliar

faça $\mathbf{b} \geq 0$ (se necessário); auxiliar: $\max -(x_{n+1} + \dots x_{n+m})$ s.a. $\bar{A}\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$

x_{n+i} variáveis de correção, $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n+m})$, $\bar{A} = (A|I_m)$

- Se ótimo do auxiliar é negativo, PLE não era viável; Se ótimo é zero, primeiros n componentes da solução obtida é solução inicial do PLE

3. Obtenha o tableau inicial $T(B)$ $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{array}{rclcl} \mathbf{x}_B & = & \mathbf{p} & + & Q\mathbf{x}_N \\ \hline z & = & z_0 & + & \mathbf{r}^T \mathbf{x}_N \end{array}$$

4. Se $\mathbf{r} \leq 0$ retorne a solução (a partir de $\mathbf{p}$, completando com 0's); **Termine;**
5. Caso contrário, escolha x_v com coeficiente positivo em $\mathbf{r}$ para entrar na base
Havendo mais de uma opção, use regra de pivoteamento
6. Se a coluna de x_v é não negativa em $T(B)$, PLE é ilimitado; **Termine**
7. Escolha variável x_u para sair da base; Se necessário, use regra de pivoteamento
8. Troque a base B e obtenha novo tableau $T(B)$; Vá para o passo 4.