

# CI1238 - Otimização

## Aula 07 - Dualidade

**Professor Murilo V. G. da Silva**

Departamento de Informática  
Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

# Dualidade em Programação Linear

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar:} & 2x_1 & + & 3x_2 \\ \text{Respeitando:} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- ▶ Mesmo sem resolver o PL, já podemos inferir **limites superiores** para o valor máximo da **função objetivo**  $2x_1 + 3x_2$ :
  - ▶ Vale no máximo **12** (usando restrição 1 e não negatividade)
  - ▶ Vale no máximo **6**, pois  $2x_1 + 4x_2 \leq 6$  (restrição (1) dividida por 2)
  - ▶ Vale no máximo **5**, pois  $2x_1 + 3x_2 \leq 5$  (some (1) e (2) e divida por 3)
- ▶ Vamos agora procurar uma combinação linear das restrições para obter:
  - ▶  $d_1x_1 + d_2x_2 \leq h$  onde  $d_1 \geq 2$ ,  $d_2 \geq 3$  e  $h$  **mínimo possível**
  - ▶ Com isso teríamos  $\forall x_1, x_2$ ,  $2x_1 + 3x_2 \leq d_1x_1 + d_2x_2 \leq h$
- ▶ Podemos fazer a restrição (1) multiplicada por um coeficiente  $y_1$
- ▶ Podemos fazer a restrição (2) multiplicada por um coeficiente  $y_2$
- ▶ Podemos fazer a restrição (3) multiplicada por um coeficiente  $y_3$
- ▶ E somar tudo para obter:

$$y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \leq y_1 \cdot 12 + y_2 \cdot 3 + y_3 \cdot 4$$

$$\therefore (4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (8y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$$

- ▶ Como encontrar  $y_1, y_2, y_3$  para que o lado direito seja mínimo?

# Dualidade em Programação Linear

$$\begin{array}{llll} \text{Maximizar:} & 2x_1 & + & 3x_2 \\ \text{Respeitando:} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- ▶ Do slide anterior procurávamos  $d_1, d_2$  e  $h$  para termos
  - ▶  $d_1x_1 + d_2x_2 \leq h$  onde  $d_1 \geq 2, d_2 \geq 3$  e  $h$  mínimo possível
- ▶ Obtivemos:
  - ▶  $(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (8y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$
- ▶ Como encontrar  $y_1, y_2, y_3$  para que o lado direito seja mínimo?

$$\begin{array}{llll} \text{Minimizar:} & 12y_1 & + & 3y_2 & + & 4y_3 \\ \text{Respeitando:} & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & \geq 2 \\ & 8y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0. \end{array}$$

- ▶ O PL acima é chamado de **dual** do PL original; O PL original é o **primal**

Solução do dual:  $(y_1, y_2, y_3) = (\frac{5}{16}, 0, \frac{1}{4})$  com função objetivo igual **4.75**.

- ▶ Ou seja, o limite superior para o primal é 4.75

Resolvendo o primal, obtemos  $x = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$  com função objetivo igual **4.75**.

- ▶ Ou seja o limitante superior era justo! Isso sempre ocorre? Sim!

# Dualidade em Programação Linear

**Maximizar:**  $2x_1 + 3x_2$   
**Respeitando:**  $4x_1 + 8x_2 \leq 12$   
 $2x_1 + x_2 \leq 3$   
 $3x_1 + 2x_2 \leq 4$   
 $x_1, x_2 \geq 0$

**Minimizar:**  $12y_1 + 3y_2 + 4y_3$   
**Respeitando:**  $4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$   
 $8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$   
 $y_1, y_2, y_3 \geq 0.$

- ▶ Qual a relação entre os vetores  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  do primal e do dual?
- ▶ E qual a relação entre as matrizes ?

**Primal:** maximizar  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ , sujeito a  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

**Dual:** minimizar  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ , sujeito a  $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

- ▶ Note: Dada solução viável  $\mathbf{y}$ , o valor de  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$  é limite superior para  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ .

# Dualidade em Programação Linear

- ▶ Dados  $A$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ :

**Primal:** maximizar  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ , sujeito a  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

**Dual:** minimizar  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ , sujeito a  $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

- ▶ Lembrando: dada sol. viável  $\mathbf{y}$ , o valor de  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$  é limite superior para  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ .
- ▶ Para toda solução viável  $\mathbf{y}$  e toda solução viável  $\mathbf{x}$ , temos  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ .
- ▶ O teorema a seguir nos diz algo mais forte:

**Teorema da Dualidade:** Dados os dois PLs:

**Primal:** maximizar  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ , sujeito a  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  (P)

**Dual:** minimizar  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ , sujeito a  $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$  (D)

Uma das 4 possibilidades ocorre:

- 1 (P) e (D) são inviáveis;
- 2 (P) é ilimitado e (D) é inviável;
- 3 (P) é inviável e (D) ilimitado;
- 4 (P) e (D) são viáveis e tem solução ótima. Sejam  $\mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{y}^*$  as soluções ótimas de (P) e (Q), respectivamente

Então  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$ . i.e. máximo de (P) é o mínimo de (D)

[ver MAT07: Sec. 6.3]