CI1238 - Otimização

Aula 07 - Dualidade

Professor Murilo V. G. da Silva
Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

Dualidade em Programação Linear

$$
\begin{array}{rrcrl}
\textbf{Maximizar:} & 2x_1 & + & 3x_2 & \\
\textbf{Respeitando:} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq 12 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

- Mesmo sem resolver o PL, já podemos inferir **limites superiores** para o valor máximo da função objetivo $2x_1 + 3x_2$:
  - Vale no máximo 12 (usando restrição 1 e não negatividade)
  - Vale no máximo 6, pois $2x_1 + 4x_2 \leq 6$ (restrição (1) dividida por 2)
  - Vale no máximo 5, pois $2x_1 + 3x_2 \leq 5$ (some (1) e (2) e divida por 3)
- Vamos agora procurar uma combinação linear das restrições para obter:
  - $\boldsymbol{d_1} x_1 + \boldsymbol{d_2} x_2 \leq \boldsymbol{h}$ onde $d_1 \geq 2$, $d_2 \geq 3$ e h mínimo possível
  - Com isso teríamos $\forall x_1, x_2$, $\mathbf{2x_1 + 3x_2 \leq d_1 x_1 + d_2 x_2 \leq h}$
- Podemos fazer a restrição (1) multiplicada por um coeficiente y_1
- Podemos fazer a restrição (2) multiplicada por um coeficiente y_2
- Podemos fazer a restrição (3) multiplicada por um coeficiente y_3
- E somar tudo para obter:

$$y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \leq y_1 \cdot 12 + y_2 \cdot 3 + y_3 \cdot 4$$

$$\therefore \quad \mathbf{(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)}x_1 + \mathbf{(8y_1 + y_2 + 2y_3)}x_2 \leq \mathbf{12y_1 + 3y_2 + 4y_3}$$

- Como encontrar y_1, y_2, y_3 para que o lado direito seja mínimo?

Dualidade em Programação Linear

$$\begin{array}{llllll} \textbf{Maximizar:} & 2x_1 & + & 3x_2 & \\ \textbf{Respeitando:} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Do slide anterior procurávamos d_1, d_2 e h para termos
  - $\boldsymbol{d_1} x_1 + \boldsymbol{d_2} x_2 \leq \boldsymbol{h}$ onde $d_1 \geq 2$, $d_2 \geq 3$ e h mínimo possível
- Obtivemos:
  - $(\mathbf{4y_1 + 2y_2 + 3y_3})x_1 + (\mathbf{8y_1 + y_2 + 2y_3})x_2 \leq \mathbf{12y_1 + 3y_2 + 4y_3}$
- Como encontrar y_1, y_2, y_3 para que o lado direito seja mínimo?

$$\begin{array}{llllllll} \textbf{Minimizar:} & 12y_1 & + & 3y_2 & + & 4y_3 & \\ \textbf{Respeitando:} & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & \geq 2 \\ & 8y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{array}$$

- O PL acima é chamado de dual do PL original; O PL original é o primal

Solução do dual: $(y_1, y_2, y_3) = (\frac{5}{16}, 0, \frac{1}{4})$ com função objetivo igual **4.75**.

- Ou seja, o limite superior para o primal é 4.75

Resolvendo o primal, obtemos $\boldsymbol{x} = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ com função objetivo igual **4.75**.

- Ou seja o limitante superior era justo! Isso sempre ocorre? Sim!

Dualidade em Programação Linear

$$\begin{array}{llllll} \textbf{Maximizar:} & \mathbf{2}\, x_1 & + & \mathbf{3}x_2 & \\ \textbf{Respeitando:} & 4x_1 & + & 8x_2 & \leq \mathbf{12} \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq \mathbf{3} \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq \mathbf{4} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} \textbf{Minimizar:} & \mathbf{12}y_1 & + & \mathbf{3}y_2 & + & \mathbf{4}y_3 & \\ \textbf{Respeitando:} & 4y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & \geq \mathbf{2} \\ & 8y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq \mathbf{3} \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{array}$$

- Qual a relação enter os vetores $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ do primal e do dual?
- E qual a relação entre as matrizes ?

Primal: maximizar $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$, sujeito a $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

Dual: minimizar $\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$, sujeito a $A^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$

- Note: Dada solução viável $\boldsymbol{y}$, o valor de $\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$ é limite superior para $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$.

Dualidade em Programação Linear

- Dados A, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$:

$$\textbf{Primal: } \text{maximizar } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \text{ sujeito a } A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\textbf{Dual: } \text{minimizar } \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \text{ sujeito a } A^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$$

- Lembrando: dada sol. viável $\boldsymbol{y}$, o valor de $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ é limite superior para $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$.
- Para toda solução viável $\boldsymbol{y}$ e toda solução viável $\boldsymbol{x}$, temos $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$.
- O teorema a seguir nos diz algo mais forte:

Teorema da Dualidade: Dados os dois PLs:

$$\textbf{Primal: } \text{maximizar } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \text{ sujeito a } A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{(P)}$$

$$\textbf{Dual: } \text{minimizar } \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \text{ sujeito a } A^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0} \quad \text{(D)}$$

Uma das 4 possibilidades ocorre:

1. (P) e (D) são inviáveis;
2. (P) é ilimitado e (D) é inviável;
3. (P) é inviável e (D) ilimitado;
4. (P) e (D) são viáveis e tem solução ótima. Sejam x^* e y^* as soluções ótima de (P) e (Q), respectivamente

   Então $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*$. i.e. máximo de (P) é o mínimo de (D)

[ver MAT07: Sec. 6.3]