CI1238 - Otimização

Aula 08 - PLI: usando o *método do relaxamento*

Professor Murilo V. G. da Silva
Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

Exemplo de PLI

EMPARELHAMENTO PERFEITO MÁXIMO EM GRAFOS BIPARTIDOS (EPMB)

Instância: Grafo ponderado *bipartido* $G = (V, E)$

Solução: Um *emparelhamento perfeito* de peso máximo em G, caso exista

Modelagem usando PL:

Variáveis: $\forall e \in E$, temos uma variável x_e

- Variáveis binárias $x_e = 1$ ou 0 indicam se $e \in M$ ou $e \notin M$
- Restrições: $0 \leq x_e \leq 1$ e $x_e \in \mathbb{Z}$

Equações: Para cada vértice $v \in V$ temos uma equação: $\sum_{e \in \partial(v)} x_e = 1$

Função objetivo: maximizar $\sum_{e \in E(G)} w(e) x_e$

Programa Linear Relaxado (PLR)

Idéia: A partir de um PLI, obter PL semelhante sem restrição de integralidade

- PLI para o problema EPMB

  Maximize: $\sum_{e \in E(G)} w(e) x_e$

  Sujeito à: $\sum_{e \in \partial(v)} x_e = 1$ e $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_e} \leq \mathbf{1}$, $\boldsymbol{x_e} \in \mathbb{Z}$

- PLR para EPMB (é um PL que é um "relaxamento" do PLI)

  Maximize: $\sum_{e \in E(G)} w(e) x_e$

  Sujeito à: $\sum_{e \in \partial_G(v)} x_e = 1$ e $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_e} \leq \mathbf{1}$, $\boldsymbol{x_e} \in \mathbb{R}$

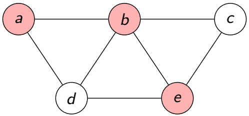
- Note: Solução $\boldsymbol{x}^*$ de PLR é um limite superior para solução do PLI
  - Suponha que tenhamos solução não ótima para o PLI
    $\Rightarrow$ podemos comparar com x^* para saber se é "boa o suficiente"

    $\Rightarrow$ Note que esta ideia vale para qualquer PLI/PLR
    $\Rightarrow$ Problemas de minimização: solução ótima do PLR é um limite inferior para solução do PLI

- Para os PLR e PLI do problema EPMB, vale o seguinte:
  - Pelo menos uma solução ótima do PLR também é solução do PLI original e é possível encontrar esta solução inteira usando o Simplex
    (veja Teo 3.2.1 e 8.2.2 [MAT07])

Outros exemplos de PLI

Dado um grafo $G = (V, E)$, um conjunto $S \in V$ é uma Cobertura por Vértices de G se toda aresta do grafo G tem ao menos uma ponta no conjunto S.



COBERTURA POR VÉRTICES (CV)
Instância: Um grafo $G = (V, E)$
Solução: Um *cobertura por vértices* S de tamanho mínimo em G

Modelando o problema usando PLI: $\forall v \in V$, temos uma variável x_v

- A idéia é que x_v indique se $v \in S$ ou $v \notin S$
- Restrições do PLI: $\forall v \in V$, $0 \leq x_e \leq 1$, sendo $x_e \in \mathbb{Z}$

  $\forall uv \in E$, $x_u + x_v \geq 1$

Função objetivo: minimizar $\sum_{v \in V} x_v$

Obtendo uma solução aproximada para CV usando o PLR

- Resolva o PLR e obtenha x^*, com $x_v^* \in [0, 1]$.
- Seja $S_{\mathrm{LP}} = \{\, v \in V : x_v^* \geq \frac{1}{2} \,\}$. Vamos argumentar que S_{LP} é uma cobertura por vértices de G (não necessariamente mínima):

$$\forall uv \in E, \quad x_u^* + x_v^* \geq 1 \;\Rightarrow\; x_u^* \geq \tfrac{1}{2} \text{ ou } x_v^* \geq \tfrac{1}{2}.$$

Seja S_{OPT} uma cobertura por vértices ótima de G associada ao vetor $\tilde{x}_v$:

$$\tilde{x}_v = \begin{cases} 1 & v \in S_{\mathrm{OPT}} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $\tilde{x}$ é solução viável no PLR, então $\sum_{v \in V} x_v^* \;\leq\; \sum_{v \in V} \tilde{x}_v = |S_{\mathrm{OPT}}|$.

<u>Fato crucial</u>: $|S_{\mathrm{LP}}| = \sum_{v \in S_{\mathrm{LP}}} 1 \;\leq\; \sum_{v \in S_{\mathrm{LP}}} 2x_v^* \;\leq\; \sum_{v \in V} 2x_v^* = 2 \sum_{v \in V} x_v^*$.

$$\Rightarrow \quad |S_{\mathrm{LP}}| \leq 2 \sum_{v \in V} x_v^* \leq 2\,|S_{\mathrm{OPT}}|.$$

Isto é, a solução S_{LP} tem tamanho no máximo dobro da solução ótima.

Exemplo de PLI

CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO (CIM)
Instância: Um grafo $G = (V, E)$
Solução: Um *conjunto independente* S de tamanho máximo em G

Variáveis: $\forall v \in V$, temos uma variável x_v

- x_v indica se $v \in S$ ou $v \notin S$
- Restrição: $0 \leq x_e \leq 1$ e $x_e \in \mathbb{Z}$
- Restrição $\forall uv \in E$, temos $x_u + x_v \leq 1$

$$\text{Função objetivo: Maximizar } \sum_{v \in V} x_v$$

- Assim como fizemos com EPMB e CIM. PLR serve para alguma coisa aqui? Não!
  - A ideia de arredondar não funciona, mas outras ideias funcionam?
  - Provavelmente não (sejam técnicas que usam PL ou outras)
  - O problema não é a técnica, mas a inaproximabilidade do problema CIM!
    $\Rightarrow$ Teorema da área de complexidade computacional: se $P \neq NP$,
    $\nexists$ algoritmo polinomial que garante aproximação "não trivial"