# CI1238 - Otimização

## Aula 16 - Algoritmos Gulosos

**Professor Murilo V. G. da Silva**

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

2026 / Primeiro Semestre

# Algoritmos Gulosos

## Árvore Geradora Mínima:

- Dado grafo ponderado conexo $G$
- Encontrar subgrafo $T$ de $G$ tal que
  - $T$ é árvore (i.e., conexo e acíclico)
  - $V(T) = V(G)$
  - Soma dos pesos de $E(T)$ é mínimo
  - Esta árvore $T$ é chamada de árvore geradora mínima (AGM)

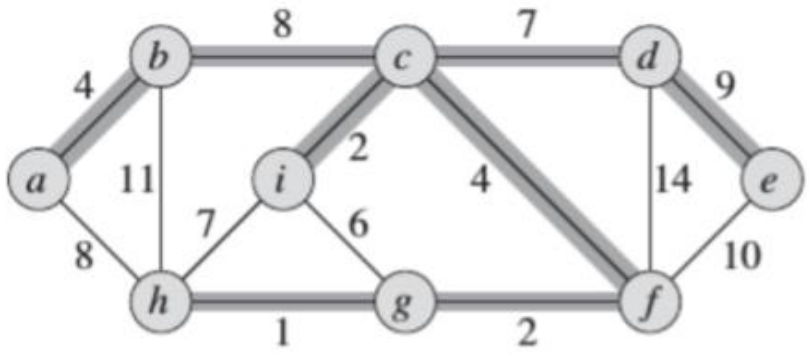



Figura: (Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein, 2009, fig 23.1, p. 625)

# Algoritmos Gulosos

## Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal

**KRUSKAL** $(G)$

1: Ordene as arestas de $G$ e coloque em $Q$
2: Inicialize $T = (V, \varnothing)$
3: **while** $|E(T)| < n - 1$ **do**
4: Remova primeiro elemento de $Q$ e coloque em $e$
5: **if** $T + e$ é acíclico **then**
6: Insira $e$ em $T$
7: **else**
8: Descarte $e$
9: **end if**
10: **end while**

# Algoritmos Gulosos

## Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim

**PRIM** $(G)$

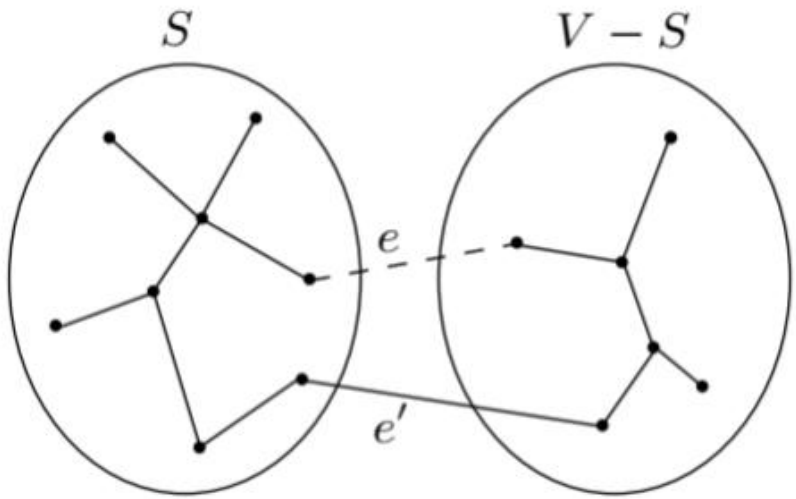
1: Fixe um vértice $v$ (escolhido arbitrariamente)
2: Inicialize $T = (\{v\}, \varnothing)$
3: **while** $|E(T)| < n - 1$ **do**
4: Escolha a aresta $e = \{u, v\}$ de menor peso incidente a $V(T)$
5: **if** $e$ tem as duas extremidades em $V(T)$ **then**
6: Descarte $e$
7: **else**
8: Insira vértices $u, v$ e aresta $e$ em $T$
9: **end if**
10: **end while**

# Algoritmos Gulosos

Prova de ambos os algoritmos: Propriedade do Corte

Teorema [DPV06]: Seja $G$ um grafo ponderado e seja $X$ um conjunto de arestas tal que para alguma AGM $T$ de $G$, $X \subseteq E(T)$. Seja $(S, V(G) \setminus S)$ uma partição de $V(G)$ tal que toda aresta de $X$ tenha suas duas pontas dentro de $S$. Seja $e$ uma aresta de peso mínimo entre todas arestas com uma ponta em $S$ e outra em $V(G) \setminus S$.

Então existe alguma AGM $T^*$ de $G$ tem $X \cup \{e\} \subseteq E(T^*)$ (possivelmente $T = T^*$).




Ideia da prova: A cada passo vamos construindo $X$ tal que "$X$ esteja no caminho" na construção de $T$. Se escolhermos $e$ não faz parte de de $T$, então existe $e'$ que podemos trocar por $e$ para obter $T^*$

# Algoritmo guloso para Construção de Códigos de Huffman

- Códigos de Huffman: esquema usado em arquivos zip, gzip, png, pdf...

Considere uma sequência de 130 milhões de símbolos, alfabeto $\Gamma = \{A, B, C, D\}$.

Queremos codificar essa sequência em binário. Solução simples:

$$A \mapsto 00, \quad B \mapsto 01, \quad C \mapsto 10, \quad D \mapsto 11.$$

Terminologia: "00 é o código para o símbolo A"

Como cada símbolo utiliza códigos de 2 bits, precisamos de 260 milhões de bits.

**É possível fazer melhor?**

# Algoritmo guloso para Construção de Códigos de Huffman

Caso comum: Os símbolos não aparecem com a mesma frequência.

| Símbolo | Frequência |
|---|---|
| $A$ | 70 milhões |
| $B$ | 3 milhões |
| $C$ | 20 milhões |
| $D$ | 37 milhões |

Observação:

- $A$ corresponde a mais da metade das ocorrências.
- $B$ é extremamente raro.

Uma codificação mais interessante poderia ser:

$A \mapsto 0$
B $\mapsto$ 100
C $\mapsto$ 101
D $\mapsto$ 11

# Algoritmo guloso para Construção de Códigos de Huffman

Nem todo conjunto de códigos de comprimentos diferentes funciona. Exemplo:

$$A \mapsto 0, \qquad B \mapsto 01, \qquad C \mapsto 11, \qquad D \mapsto 001.$$

A string binária 001 corresponde a quais símbolos? A string $AB$ ou a string $D$?

Código Livre de Prefixos: Nenhum código é prefixo de outro. $\rightarrow$ sempre funciona!

- A codificação do slide anterior é um exemplo
- O Algoritmo de Huffman resolve o problema de encontrar uma codificação ótima

  Problema que o algoritmo resolve:

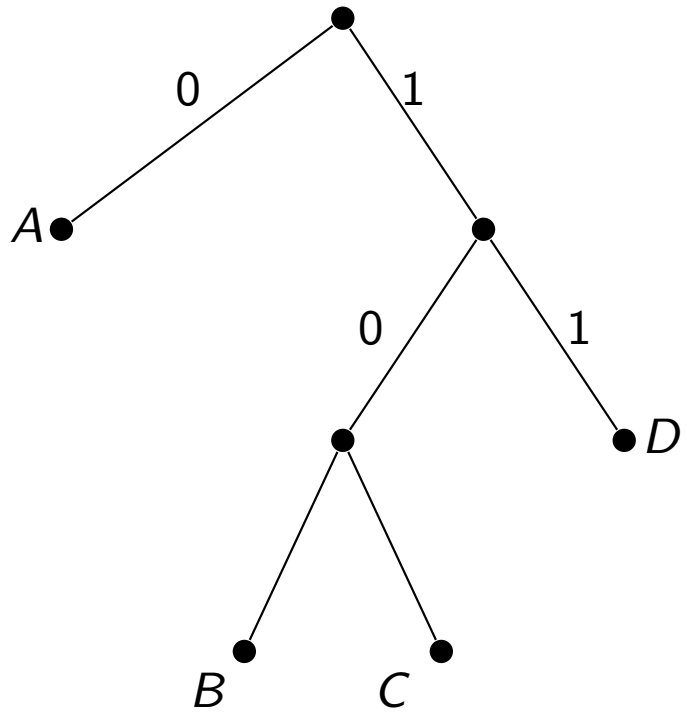
  Entrada: String de certo alfabeto
  Saída: Codificação binária ótima

Variação do problema: Entrada é lista de símbolos com respectivas frequências médias

# Algoritmo guloso para Construção de Códigos de Huffman

Usando uma árvore binária para representar a codificação:

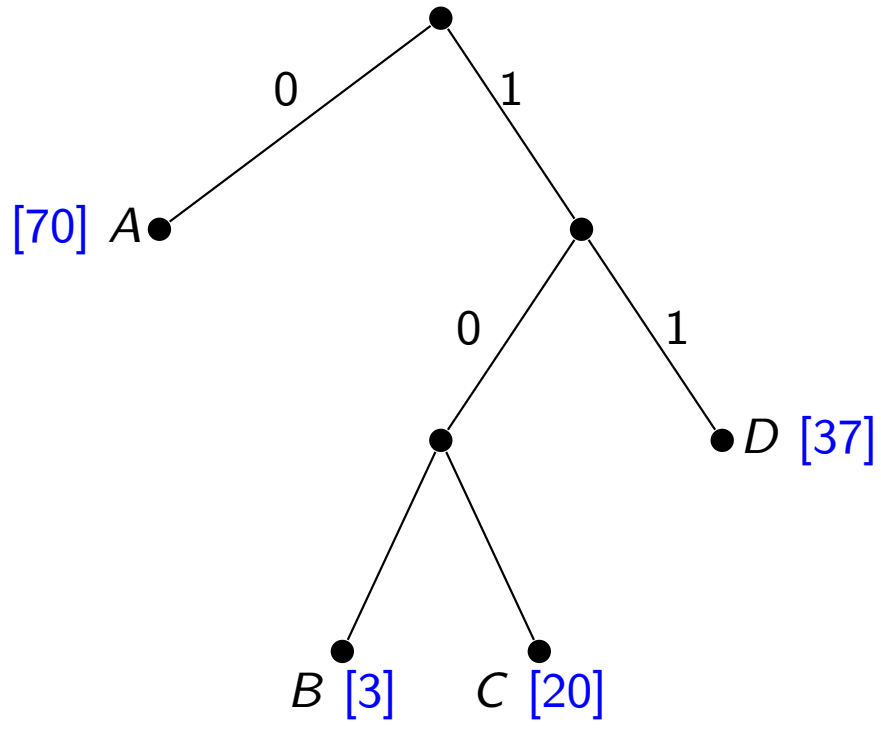
| Símbolo | String Binária |
|---|---|
| $A$ | 0 |
| $B$ | 100 |
| $C$ | 101 |
| $D$ | 11 |



# Algoritmo guloso para Construção de Códigos de Huffman

Usando uma árvore binária para representar a codificação:

| Símbolo | String Binária |
|---|---|
| $A$ | 0 |
| $B$ | 100 |
| $C$ | 101 |
| $D$ | 11 |

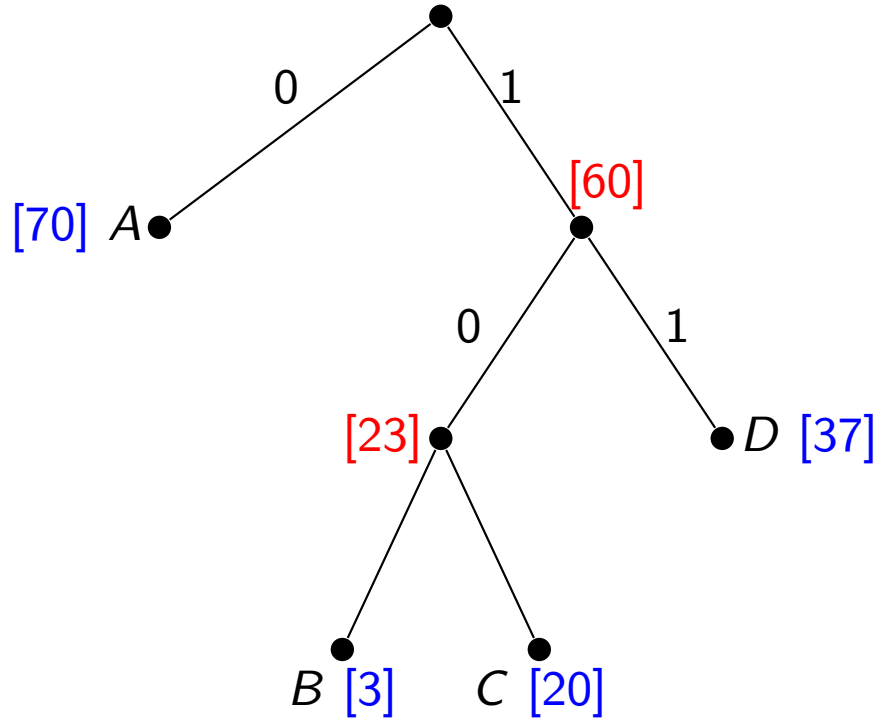



Incluindo as frequências dos símbolos na árvore

# Algoritmo guloso para Construção de Códigos de Huffman

Usando uma árvore binária para representar a codificação:

| Símbolo | String Binária |
|---|---|
| $A$ | 0 |
| $B$ | 100 |
| $C$ | 101 |
| $D$ | 11 |




Incluindo as frequências dos símbolos na árvore e frequências nos nós internos.

# Algoritmo guloso para Construção de Códigos de Huffman

Formalizando um pouco:

Suponha que $\Gamma = \{1, 2, ..., n\}$ e os símbolos 1, 2,...,$n$ possuem frequências

$$f_1, f_2, \ldots, f_n.$$

Queremos: Árvore de codificação $T$ com símbolos nas folhas tal que o tamanho da string codificada é mínimo.

Se o símbolo $i$ aparece em uma folha de profundidade $d_i$, então ele contribui com $f_i \cdot d_i$ bits no tamanho da string codificada em binário

Custo da árvore:

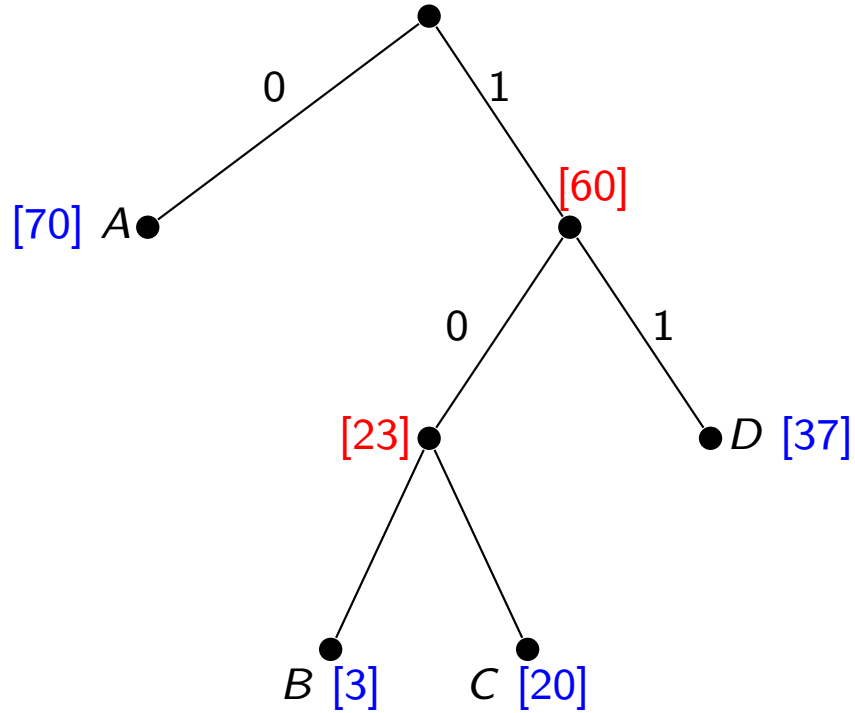
$$\text{custo}(T) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, d_i.$$

- Importante: vamos incluir em $T$ as frequências (incluindo nós internos)
- Decodificando uma string binária: O número de vezes que visitamos cada nó é exatamente a frequência associada ao nó

# Algoritmo guloso para Construção de Códigos de Huffman

- Decodificando uma string binária: O número de vezes que visitamos cada nó é exatamente a frequência associada ao nó

| Símbolo | String Binária |
|---|---|
| $A$ | 0 |
| $B$ | 100 |
| $C$ | 101 |
| $D$ | 11 |




- Observação: O custo de $T$ também é igual à soma das frequências $f_v$ de todos os nós $v$ (internos e folhas) de $T$, exceto a raiz.

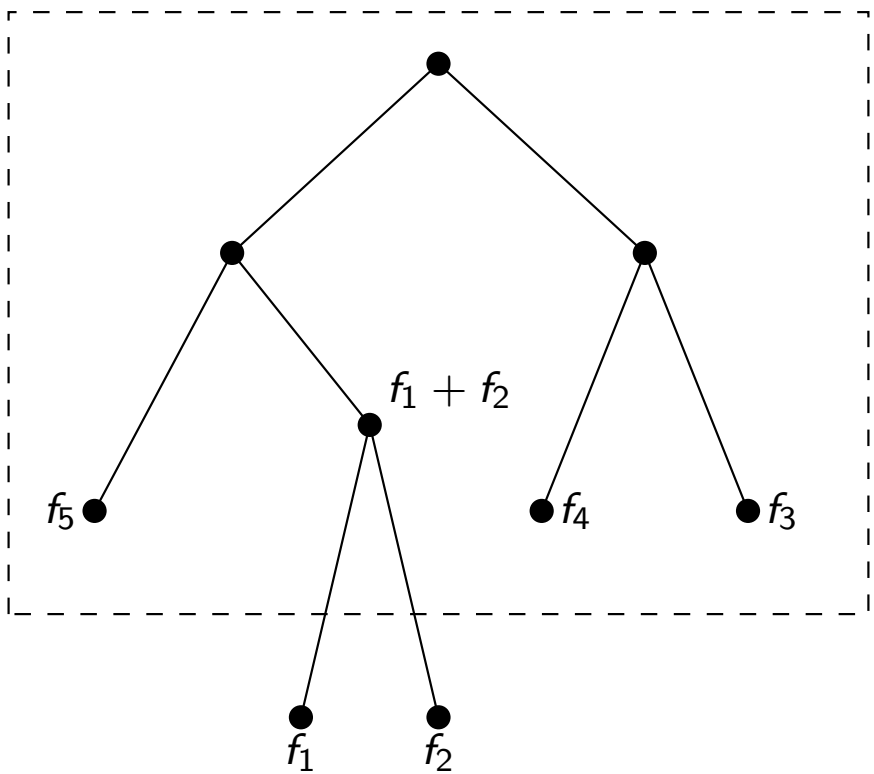
  i.e., $\text{custo}(T) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, d_i = \sum_{v \in T} f_v$

- Fato crucial: Os dois símbolos com menores frequências devem aparecer nas folhas mais profundas da árvore ótima.
  Prova: Caso contrário poderíamos trocar um desses símbolos por outro de frequência maior mais abaixo em $T$ e obter $T'$ tal que $custo(T') < custo(T)$.

# Algoritmo guloso para Construção de Códigos de Huffman

## Algoritmo Guloso:

1. Encontre as duas menores frequências $f_1$ e $f_2$.
2. Criar um novo nó pai para elas.
3. Atribuir ao novo nó a frequência $f_1 + f_2$.
4. Resolver recursivamente o problema para a instância $(f_1 + f_2), f_3, f_4, \ldots, f_n$

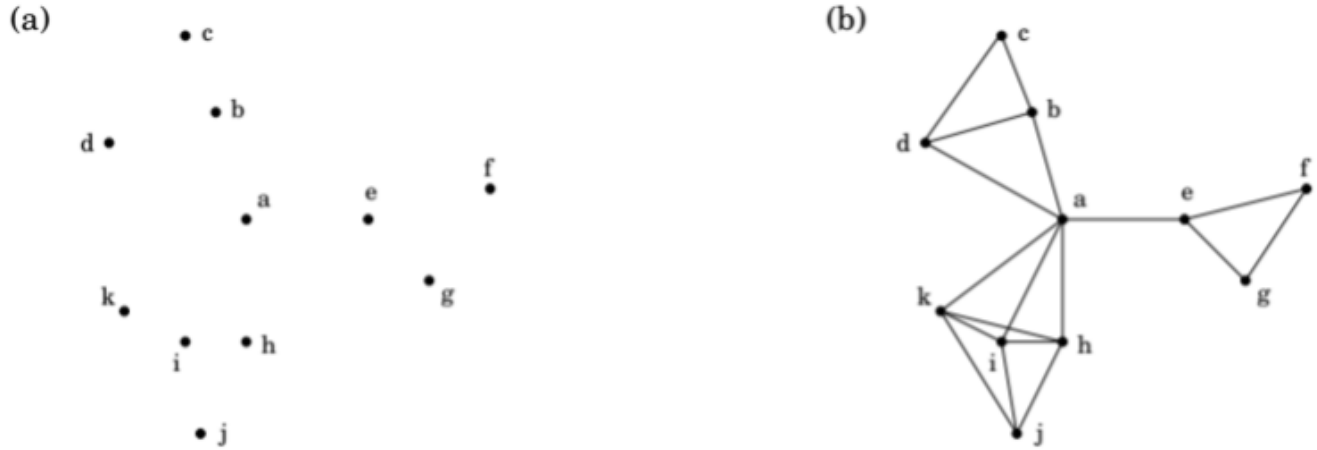



Complexidade: $O(n \log n)$ (usando um *min heap*)

# Algoritmo Guloso para Cobertura por Conjuntos

Problema típico: Cidades que devem ser atendidas por algum serviço:

→ Não há necessidade de instalar serviço em cada uma das cidades, pois algumas cidades são próximas uma das outras. Qual a menor quantidade de cidades?




$B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$
$S_a = \{a, b, d, e, h, i, k\},\ S_b = \{a, b, c, d\},\ S_c = \{b, c, d\},\ \cdots\ ,\ S_k = \{a, h, i, j, k\}$

**Cobertura por Conjuntos (CC):**

- **Entrada:** Um conjunto $B$ de tamanho $n$ e $m$ subconjuntos $S_1, ..., S_m \subseteq B$.
- **Saída:** Uma lista de $k \leq m$ subconjuntos $S_i$ de forma que a união dos $k$ conjuntos inclua todos $n$ elementos de $B$ e $k$ seja mínimo.

Algoritmo Guloso: A cada passo escolha o conjunto $S_i$ que contenha mais elementos ainda não inclusos nos conjuntos já escolhidos.

# Algoritmo Guloso para Cobertura por Conjuntos

Algoritmo Guloso: A cada passo escolha o conjunto $S_i$ que contenha mais elementos ainda não inclusos nos conjuntos já escolhidos.

- Seja $n$ o tamanho de $B$ e $k$ o tamanho da solução ótima
- Estratégia gulosa não funciona (vimos isto no exemplo do slide anterior)

- Mas a estratégia garante uma solução de tamanho no máximo $k \cdot \ln n$

Veremos isso agora.

# Algoritmo Guloso para Cobertura por Conjuntos

**Cobertura por Conjuntos (CC):**

- **Entrada:** Um conjunto $B$ de tamanho $n$ e $m$ subconjuntos $S_1, ..., S_m \subseteq B$.
- **Saída:** Uma lista de $k$ subconjuntos $S_i$ de forma que a união dos $k$ conjuntos inclua todos $n$ elementos de $B$ e $k$ seja mínimo.

**Algoritmo Guloso**: A cada passo escolha o conjunto $S_i$ que contenha mais elementos ainda não inclusos nos conjuntos já escolhidos.

Teorema: Se a solução ótima tem tamanho $k$, então o algoritmo guloso devolve uma solução com $k \cdot \ln n$ elementos, onde $|B| = n$.

- Fato 1: Seja $n_i$ o número de elementos descobertos depois de $i$ passos $(n_0 = n)$
  A cada passo uma fração de pelo menos $1/k$ dos elementos restantes é coberto

  **Passo 1:** Sobram $n_1 \leq (1 - 1/k)n_0$ elementos;
  **Passo 2:** Sobram $n_2 \leq (1 - 1/k)n_1 \leq (1 - 1/k)^2 n_0$ elementos;
  **Passo 3:** Sobram $n_3 \leq (1 - 1/k)n_2 \leq (1 - 1/k)^3 n_0$ elementos;

  $\vdots$

  **Passo *t*:** Sobram $n_t \leq (1 - 1/k)n_{t-1} = (1 - 1/k)^t n_0 = (1 - 1/k)^t n$ elementos;

  Vamos provar que no passo $t = \ln n \cdot k$ todos elementos foram escolhidos

  Fato 2: $\forall x \neq 0,\ 1 - x < e^{-x}$. Consequência: Como $\frac{1}{k} \neq 0$, então $1 - \frac{1}{k} < e^{-\frac{1}{k}}$

$$n_t \leq (1-1/k)^t \cdot n < (e^{-1/k})^t \cdot n = (e^{-1/k})^{\ln n \cdot k} \cdot n = e^{\frac{-\ln n \cdot k}{k}} \cdot n = \frac{1}{e^{\ln n}} \cdot n = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

# Algoritmo Guloso para Cobertura por Conjuntos

**Cobertura por Conjuntos (CC):**

- **Entrada:** Um conjunto $B$ de tamanho $n$ e $m$ subconjuntos $S_1, ..., S_m \subseteq B$.
- **Saída:** Uma lista de $k$ subconjuntos $S_i$ de forma que a união dos $k$ conjuntos inclua todos $n$ elementos de $B$ e $k$ seja mínimo.

**Caso particular do problema:** Antes de vermos um algoritmo guloso para CC, vamos ver a relação deste problema com o problema da cobertura por vértices

Cobertura por Vértices (CV)

- **Entrada:** Um grafo $G = (V, E)$ .
- **Saída:** Conjunto $S$ de vértices de tamanho mínimo tal que $\forall e \in E$, a aresta $e$ tem pelo menos uma ponta em $S$

Note que CV é um caso particular de CC, pos dado $G = (V, E)$ com vértices $v_i, ..., v_n$

- Faça $B = E(G)$ e $S_i = \partial(v_i), v_i \in V$
  (ou seja, $S_i$ é o conjunto de arestas incidentes a $v_i$)
- Portanto algoritmo guloso (escolher vértice de maior grau) encontra cobertura de tamanho $k \cdot \ln |V|$ (sendo $k$ o tamanho da cobertura ótima)
- Obs: No caso particular de existem algoritmos com aproximações melhores (e.g., usando *PL relaxado* a garantia de no máximo $2k$ vértices), mas para o caso geral do CC uma $\ln n$-aproximação é a melhor possível (no cenário $\neq NP$).

# Algoritmos Gulosos: Considerações finais

Em geral, o seguinte pode ser dito sobre algoritmos gulosos:

- Quando funcionam, geralmente os algoritmos são simples e eficientes.
- A prova de corretude pode ser difícil.

- Para muitos problemas não funcionam e não têm garantias de aproximação.

Considere o problema da clique máxima.

O que seria um algoritmo guloso para este problema?

- Escolher vértices de maior grau possível?
- Excluir vértices de menor grau possível?

**Exercício**: Mostre que ambas estratégias não funcionam.

Considere o problema da coloração de grafos (cores 1, 2, 3, ...).

O que seria um algoritmo guloso para este problema?

- Para cada vértice, escolher a "menor cor" disponível.

**Exercício**: Mostre que este algoritmo guloso não funciona.