CI-202 - Métodos Numéricos

Aula 02 - Representação de Inteiros em Binário

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

11/09/2024

Sistema Decimal e Sistema Binário

Símbolos do Sistema Decimal (Dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Enumerando: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,..., 19, 20, 21,..., 99, 100, 101,...

Símbolos do Sistema Binário (Bits): 0, 1

Enumerando em binário: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001,...

Considere o número 293 na base decimal:

- $293 = 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Considere o número 9 escrito em binário, isto é, 1001:

- $1001 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
- Notação: $9 = (1001)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Representação de naturais em binário

A representação em binário $(b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0)_2$, onde $b_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, \cdots, n$, corresponde ao número inteiro não negativo

$$b_n \cdot 2^n + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + b_0 \cdot 2^0.$$

- Os símbolos b_i são chamados de *bits*.
- Para números negativos: usamos o símbolo "$-$" à esquerda do bit b_n.

- Se não houver ambiguidade, os parênteses são omitidos

  exemplo: $10011_2 = 19$

Generalizando, $(\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0)_a$, onde $\alpha_i \in \{0, 1, ..., a-1\}$, representa

$$\alpha_n \cdot a^n + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \cdot a^0.$$

Converta os seguintes números binários em decimais

- $100_2 =$
- $101_2 =$
- $110_2 =$
- $111_2 =$
- $10011_2 =$

Converta os seguintes números binários em decimais

- $100_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4$
- $101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$
- $110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$
- $111_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 7$
- $10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 19$

Decimal para binário

Considere o número 3028

- vamos fazer *divisão inteira* por 10
- 3028 ÷ 10
  - Resto: **8**
  - Quociente: 302

  - Partindo de 302, vamos repetir a divisão inteira:
  - Resto: **2**
  - Quociente: 30

  - Vamos repetir o mesmo com 30:
  - Resto: **0**
  - Quociente: 3

  - Vamos repetir o mesmo com 3:
  - Resto: **3**
  - Quociente: 0

Note que, de trás para frente os restos são os dígitos de **3028**.

Decimal para binário

Dado o número 3028

- fizemos *divisão inteira* por 10
- $3028 \div 10$
Quociente	302	30	3	0
Resto	**8**	**2**	**0**	**3**

    ←

- e se fizermos a *divisão inteira* por 2?
- $3028 \div 2$
Q	1514	757	378	189	94	47	23	11	5	2	1	0
R	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**

    ←

$$3028 = 101111010100_2$$

- Esse algoritmo funciona para qualquer base a
- Por que isso funciona?

Conversão de decimal para binário

Dado $x \in \mathbb{N}$, qual sua representação na base a?

$$x = (\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0)_a \qquad \alpha_i \in \{0, ..., a-1\}$$

- $x = \alpha_n \cdot a^n + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot a^1 + \alpha_0 \cdot a^0$
- $x = \alpha_n \cdot a^n + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot a^1 + \alpha_0$

Vamos dividir x por a: (divisão não necessariamente inteira)

- $\frac{x}{a} = \alpha_n \cdot a^{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot a^{n-3} + \cdots + \alpha_1 \cdot a^0 + \frac{\alpha_0}{a}$

  note: $0 \leq \alpha_0 < a$

Considere a divisão inteira de x por a:

- Quando é possível fazer a divisão inteira? Se e somente se $\alpha_0 = 0$
- Quem é o quociente Q e o resto R na divisão de x por a?

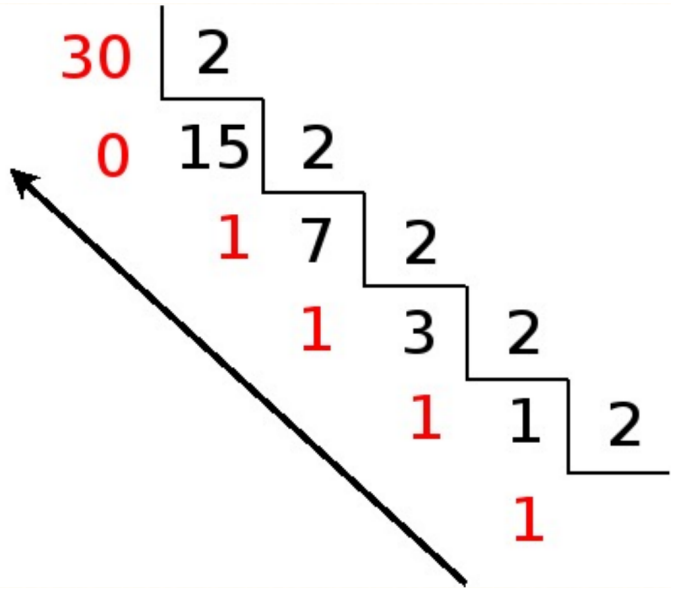
  note que $x = aQ + R$ e $0 \leq R < a$

$$aQ = \alpha_n \cdot a^n + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot a^1$$
$$R = \alpha_0$$

i.e,
$$Q = \alpha_n \cdot a^{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot a^{n-2} + \cdots + \alpha_1 \cdot a^0 = (\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1)_a$$
$$R = \alpha_0 = (\alpha_0)_a$$

Conversão de decimal para binário

Mais um exemplo: convertendo 30 para binário



i.e. $30 = (11110)_2$

Converta os seguintes números decimais em binários

- $8 =$
- $9 =$
- $12 =$
- $17 =$
- $21 =$
- $39 =$

Converta os seguintes números decimais em binários

- $8 = 1000_2$
- $9 = 1001_2$
- $12 = 1100_2$
- $17 = 10001_2$
- $21 = 10101_2$
- $39 = 100111_2$