CI-202 - Métodos Numéricos

Aula 05 - Erros

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

16/09/2024

Número ponto flutuante de 16 bits

- Qual o menor valor possível **maior de que zero**?

s_1	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	s_2	e_1	e_2	e_3	e_4
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

- $0,1000000000 \cdot 2^{-1111} = 0,1 \cdot 2^{-15} = 0,000015259$

- Qual o **segundo menor** valor possível maior de que zero?

s_1	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	s_2	e_1	e_2	e_3	e_4
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

- $0,1000000001 \cdot 2^{-15} = 0,000015289$

- Qual o **terceiro menor** valor possível maior de que zero?

s_1	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	s_2	e_1	e_2	e_3	e_4
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1

- $0,1000000010 \cdot 2^{-15} = 0,000015332$

Note: Existem “degraus” e estes degraus não são uniformes

A precisão e o *epsilon* da máquina

- Note: A precisão (número de dígitos significativos que podemos trabalhar) e o *epsilon* (tamanho dos saltos) da máquina tem a ver com a representação de reais de maneira finita
  - Isso não tam a ver com representação em binário pela máquina.
  - Mesmo se a máquina usasse base 10, como nós, quando há arredondamento ou truncamento de um número, perde-se precisão
  - Ainda assim, é importante estar atento ao fato que a máquina usa binário, pois um número pode ter representação finita na base 10, mas não na base 2 (por exemplo, 0,1)
- Mas exatamente o que é o *epsilon* da máquina?

O *epsilon* da máquina

- Uma definição simples e comum: menor $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que a operação $1 + \epsilon$ resulta em um maior do que 1
  - Pode variar de máquina para máquina (diferentes arquiteturas, diferentes *standards* para representação, etc)
  - Existem diferentes definições (teóricas) também
  - Na prática, aproximação para ϵ pode ser obtido de maneira empírica
- Operações com números menores que ϵ podem gerar erros
  - Ou até mesmo maiores: por exemplo, uma subtração de dois números muito próximos
- A seguir: Formalizando um pouco o conceito de erro.

Erro absoluto e erro relativo

- erro absoluto $= |\text{valor exato} - \text{valor aproximado}|$
- $\text{erro\_relativo} = \frac{|\text{valor\_exato} - \text{valor\_aproximado}|}{|\text{valor\_exato}|}$
- Geralmente não conhecemos o valor exato: mas queremos garantir que erro $\leq \varepsilon$

Exemplo

- Valor exato: $\alpha = 2.655,233$
- Valor aproximado: $\alpha' = 2.655$
  - Erro absoluto: $\Delta\alpha = |\alpha - \alpha'| = 0,233$
  - Erro relativo: $\frac{\Delta\alpha}{|\alpha|} = 0,233/2.655,233 = 0,00008775 = 0,008775\%$
- Valor exato: $\alpha = 10,233$
- Valor aproximado: $\alpha' = 10$
  - Erro absoluto: $\Delta\alpha = |\alpha - \alpha'| = 0,233$
  - Erro relativo: $\frac{\Delta\alpha}{|\alpha|} = 0,233/10,233 = 0,02277 = 2,277\%$

Exemplo de garantia de erro

- Erro absoluto para aproximação de π
- Digamos que π' é o valor aproximado
- erro_absoluto $= |\pi - \pi'|$
- Suponha que sabemos que $\pi \in (3,14; 3,15)$, portanto qualquer valor nesse intervalo terá um erro absoluto com limite superior com a garantia:
- erro_absoluto $= |\pi - \pi'| \leq 0,01$

Critério de Arredondamento

- Ao registrar um valor aproximado, costuma-se:
  - Somar meia unidade após a última casa decimal a conservar.
  - Desprezar as demais casas.

Critério de Arredondamento

- Exemplo: Com dois números significativos tem-se:
  - $\sqrt{3} = 1,732\ldots \equiv 1,73$
    - $1,732\ldots + 0,005 = 1,737 \rightarrow 1,73$
  - $\sqrt{2} = 1,259\ldots \equiv 1,26$
    - $1,259\ldots + 0,005 = 1,264 \rightarrow 1,26$
- Este critério limita o erro a meia unidade da última casa conservada:
  - $1,732\ldots - 1,73 = 0,00205 < 0,005$

Erros de Truncamento

- Provenientes da utilização de processos infinitos ou muito grandes para a determinação de um valor.
- Por exemplo, em séries infinitas:
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$
- Só conseguimos usar um número finito de termos. Se usarmos os três primeiros, temos:
  - $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$
- O erro de truncamento será $\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

Propagação de erros

- Em uma máquina de 64 bits os erros para operações elementares de adição, subtração, multiplicação e divisão são na ordem de $\varepsilon = 2{,}22 \cdot 10^{-16}$
- Assumindo que x e y são representados com todos dígitos corretos, temos aproximadamente 15 dígitos significativos corretos ao fazer uma dessas operações.
- Em geral, não precisamos nos preocupar. Se necessário, podemos usar software com bibliotecas de precisão arbitrária.