CI-202 - Métodos Numéricos

Aula 06 - Zeros de equações transcendentes e polinomiais (Parte 1)

Professor Murilo V. G. da Silva

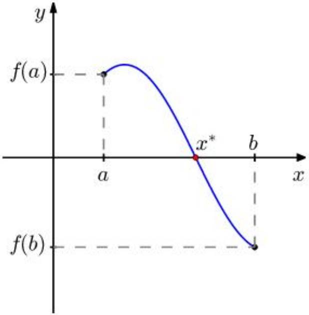
Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

16/09/2024

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

- Seja $f(x)$ uma função real definida em um intervalo $[a, b]$.
- Chama-se de raíz(es) desta função a todo $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$.



Zeros de equações transcendentes e polinomiais

1. Introdução (aula de hoje)
2. Método da Bisseção (aula de hoje)
3. Método da Falsa Posição
4. Método da Iteração Linear
5. Método de Newton-Raphson
6. Método da Secante

Introdução: Métodos Diretos vs Métodos Iterativos

- Método Direto
  - Fornece a solução (valor da raiz) em apenas um "único" passo.
  - Esta raiz é exata, a menos de erros de arredondamento.
  - Equação $\Rightarrow$ Fórmula $\Rightarrow$ Raízes
    Exemplo: fórmula de Bhaskara.
- Método Iterativo
  - Sequência de passos, chegando cada vez mais próximo das raízes
  - Equação $\Rightarrow x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 ... \rightarrow x_t \Rightarrow$ resposta x_t é aproximada
  - Normalmente recursivo (i.e., valor obtido a cada passo depende dos valores obtidos em passos anteriores).

Exemplo de método direto

Fórmula de Bhaskara Dada uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$

- A fórmula é $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Exemplo: $x^2 - 3x - 2 = 0$

- $a = 1 \quad b = -3 \quad c = 2$
- Basta subtituir na fórmula e obter as raízes 1 e 2

Obs: Há um "porém" aqui, mas veremos isso depois...

Exemplo de método interativo

Método de Newton: Computar raíz de n

- Note: computar $\sqrt{n}$ é um caso particular do problema de encontrar raiz de função quadrática
- Computar $\sqrt{4}$ é o mesmo que resolver $x^2 - 4 = 0$

O método iterativo para $\sqrt{n}$ usando Método de Newton é

$$x_k = \frac{\left(\frac{n}{x_{k-1}} + x_{k-1}\right)}{2}$$

- Normalmente faz-se $x_0 = 1$
- A partir de x_0, computamos x_1
- A partir de x_1, computamos x_2
- E assim por diante...

Exemplo de método interativo

Computando raíz de $\sqrt{4}$ com Método de Newton

$$x_k = \frac{\left(\frac{4}{x_{k-1}} + x_{k-1}\right)}{2}$$

- Valor inicial: $x_0 = 1$

- $x_1 = (4/x_0 + x_0)/2 = (4+1)/2 = 2{,}5$
- $x_2 = (4/x_1 + x_1)/2 = (4/\ 2{,}5 + 2{,}5)/2 = 2{,}05$
- $x_3 = (4/x_2 + x_2)/2 = (4/\ 2{,}05 + 2{,}05)/2 = 2{,}000609$
- $x_4 = (4/x_3 + x_3)/2 = (4/\ 2{,}000609 + 2{,}000609)/2 = 2{,}0000000093$

Por que paramos em x_4?

- Parada do metodos iterativos depende de uma condição de parada
- Note: solução exata x_* faz $f(x_*) = 0$ (lembrando que $f(x) = x^2 - 4$)

Neste exemplo, usamos a condição de parada: $|f(x_k)| < 10^{-4}$

Introdução: Métodos Diretos vs Métodos Iterativos

- Método Iterativo
  - Sequência de passos, chegando cada vez mais próximo da raiz
  - Na prática: programa executa repetição até condição satisfeita:

```
while (condition) {
    ...
    xnew = ((n/x_ant) + x_ant) / 2;
    ...
}
```

- Método Direto
  - Fornece a solução (valor da raiz) em apenas um "único" passo.
  - Na prática: código tem apenas operações básicas

```
...
root = (-b + sqrt(b*b - 4*a*c)) / (2 * a);
...
```

  - Entretanto, a função `sqrt` é básica?

Métodos Iterativos para raízes de funções

- Nosso foco nesta disciplina será em Métodos Iterativos para vários problemas: zero de funções, cálculo de integrais, interpolação, etc
  - Esta e aulas seguintes: métodos para zero de funções
- Fato importante:

Teorema de Abel–Ruffini (1799, 1824) Não existem fórmulas resolutivas gerais que determinem as soluções de uma equação algébrica de grau ≥ 5.

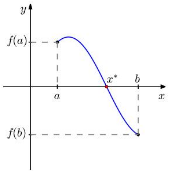
Tipicamente a solução tem duas etapas:

- Encontrar um intervalo em que existe uma raiz.
  - Nesta disciplina, normalmente será dado
  - Mas poderemos precisar chutar às vezes
  - Teorema útil: Teorema de Bolzano

- Diminuir iterativamente o intervalo
  - Método propriamente dito para encontrar raiz x^*
  - Vamos encontrando valores $x_1, x_2, x_3...$, de forma que

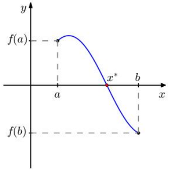
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

Teorema de Bolzano (1817) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.



Tipicamente a solução tem duas etapas:

Teorema de Bolzano (1817) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.



Teorema [Garantia de unicidade]: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no intervalo $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $\forall x \in *(a, b)$, $f'(x) > 0$, então existe exatamente um valor $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

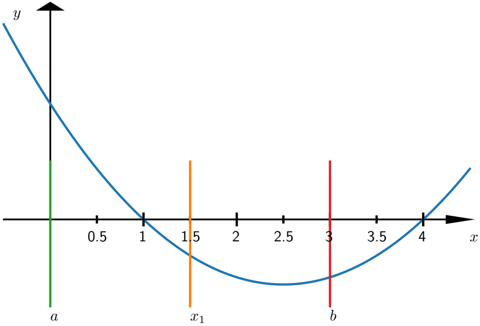
- Se $\forall x \in *(a, b), f'(x) < 0$, também vale a unicidade da raíz.

Note que condições dos dois teoremas são suficientes, mas não necessárias.

Método da Bisseção: Ideia principal

Exemplo: $f(x) = x^2 - 5x + 4$

- Dado itervalo $[a, b]$ que contém raiz única $[a, b] = [0, 3]$

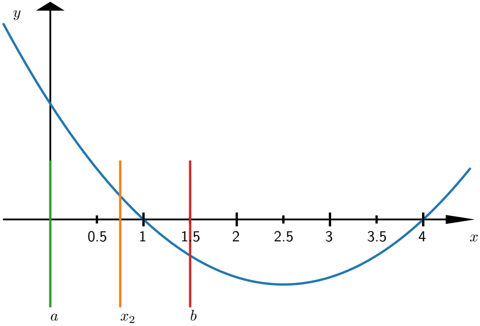


- $x_1 = (a + b)/2$
- Aplica-se Teorema de Bolzano nos intervalos $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$
- Neste caso novo intervalo é $[a, x_1]$

Ideia principal

Exemplo: $f(x) = x^2 - 5x + 4$

- Itervalo que contém raiz: $[a, b]$ $\quad a = 0 \quad b =$1,5

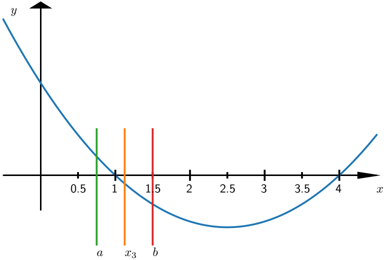


- $x_2 = (a + b)/2$
- Aplica-se Teorema de Bolzano nos intervalos $[a, x_2]$ e $[x_2, b]$
- Neste caso novo intervalo é $[x_2, b]$

Ideia principal

Exemplo: $f(x) = x^2 - 5x + 4$

- Itervalo que contém raiz: $[a, b]$ $a =$0,75 $b =$1,5



- $x_3 = (a + b)/2$
- Aplica-se Teorema de Bolzano nos intervalos $[a, x_3]$ e $[x_3, b]$
- Neste caso novo intervalo é $[a, x_3]$

  $\vdots$
- **Repete até que $|b - a| \leq \epsilon$** note: que $|b - a| \leq \epsilon \Rightarrow |x_k - x_{k+1}| \leq \epsilon$

  Também paramos se eventualmente tivermos $f(x_k) = 0$

Algoritmo

Dado intervalo $[a, b]$ contendo a raiz única tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$,

$$\text{Faça} \quad x_k = \frac{a+b}{2} \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

- Se $f(a) \cdot f(x_k) < 0$
  - então $b \leftarrow x_n$
- Se $f(x_k) \cdot f(b) < 0$
  - então $a \leftarrow x_n$

Critério de Parada:

- $|b - a| \leq \epsilon$ ou $f(x_n) = 0$
- Alguns autores usam: $f(x_n) \leq \epsilon$
  (por padrão não usaremos esse)

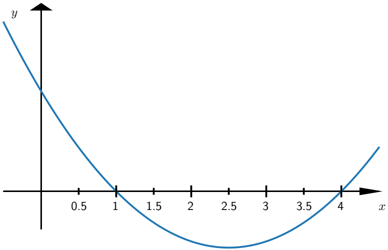
Convergência

Seja $[a_n, b_n]$ o intervalo no n-ésimo passo

- O comprimento de cada intervalo é:
  $|b_n - a_n| = (|b - a|)/2^n$ onde n é o número de iterações
- Como $\lim_{n\to\infty}|b_n - a_n| = \lim_{n\to\infty}(|b - a|/2^n) = 0$
- O método sempre converge.

Exemplo: $f(x) = x^2 - 5x + 4$

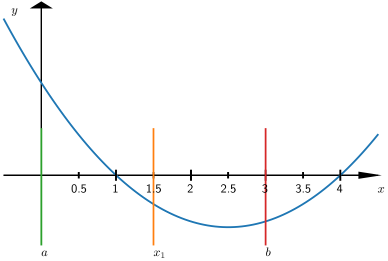
- Entrada do algoritmo:
  $a = 0$ e $b = 3$
  tolerância de erro $\epsilon \leq 0,2$



Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Iteração 1:

- $a = 0$; $f(a) = 4$
- $b = 3$; $f(b) = -2$
- $x_1 = (a + b)/2 = 1{,}5$

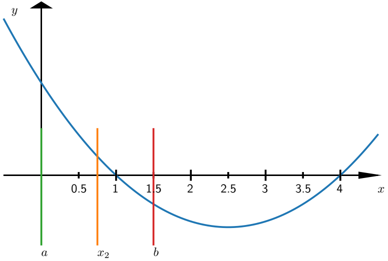


- Critérios de parada:
  - $f(x_1) =$ -1,25 *(continua)*
  - $|b - a| > 0,2$ *(continua)*
- Atualiza para próxima iteração:
  - $f(a)f(x_1) < 0$
  - $b \leftarrow x_1 = 1,5$

Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Iteração 2

- $a = 0$; $f(a) = 4$
- $b = 1,5$; $f(b) = -1,25$
- $x_2 = (a + b)/2 = 0{,}75$

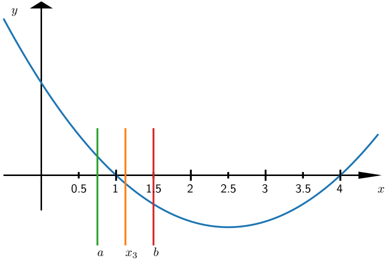


- Critérios de parada:
  - $f(x_2) = 0,8125$ *(continua)*
  - $|b - a| > 0,2$ *(continua)*
- Próxima iteração:
  - $f(a)f(x_1) > 0$
  - $a \leftarrow x_2 = 0,75$

Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Iteração 3:

- $a = 0,75$; $f(a) = 0,8125$
- $b = 1,5$; $f(b) = -1,25$
- $x_3 = (a + b)/2 = 1{,}125$

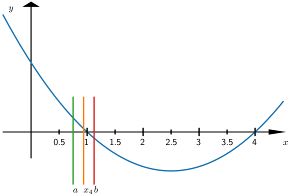


- Critérios de parada
  - $f(x_3) =$ -0.359375 *(continua)*
  - $|b - a| > 0,2$ *(continua)*
- Próxima iteração:
  - $f(a)f(x_3) < 0$
  - $b \leftarrow x_3 = 1,125$

Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Iteração 4:

- $a = 0,75$; $f(a) = 0,8125$
- $b = 1,125$; $f(b) = -0.359375$
- $x_4 = (a+b)/2 = 0.9375$

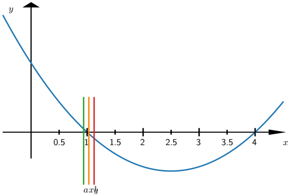


- Critérios de parada:
  - $f(x_4) = 0.19140625$ *(continua)*
  - $|b - a| > 0,2$ *(continua)*
- Próxima Iteração:
  - $f(a)f(x_4) > 0$
  - $a \leftarrow x_4 = 0.9375$

Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Iteração 5:

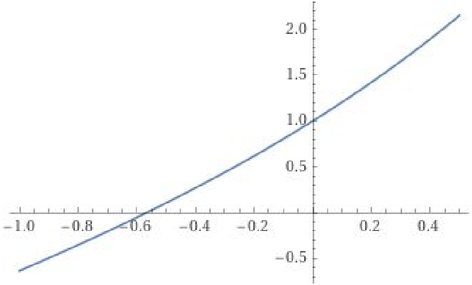
- $a = 0.9375$; $f(a) = 0.19140625$
- $b = 1,125$; $f(b) = -0.359375$
- $x_5 = (a+b)/2 = 1.03125$



- Critérios de parada:
  - $f(x_5) =$ -0.0927734375 *(continua)*
  - $|b - a| < 0,2$ *terminou!!!*

Exercício: $f(x) = e^x + x$

- Entrada do algoritmo:
  $a = -1$ e $b = -0{,}5$
  tolerância de erro $\epsilon \leq 0,05$



Exemplo: $f(x) = e^x + x$ $\quad$ $erro = 0,05$

- Iteração 1
- $a = -1$; $f(a) =?$
- $b = -0,5$; $f(b) =?$
- $x_1 = (a+b)/2 = \ ?$
- Condições de parada
  - $f(x_1) =?$ *(terminou: sim/não)*
  - $|b-a| =?$ *(terminou: sim/não)*
  - $f(a) \cdot f(x_1) > 0$
    Novo intervalo: $? \leftarrow x_1$

Preencha a tabela acima para iterações 1,2,3,...

Exemplo: $f(x) = e^x + x$ $\qquad$ $erro = 0,05$

- Iteração 1
- $a = -1$; $f(a) = -0,63$
- $b = -0,5$; $f(b) = 0,11$
- $x_1 = (a+b)/2 = \dfrac{-1 + (-0,5)}{2} = -0,75$
- Condições de parada
  - $f(x_1) = f(-0,75) = -0,28$ *(terminou: não)*
  - $|b - a| = 0,5$ *(terminou: não)*
  - $f(a) \cdot f(x_1) = (-0,63) \cdot (-0,28) > 0$
    Novo intervalo: $a \leftarrow x_1 = -0,75$

Exemplo: $f(x) = e^x + x$ $\quad$ $erro = 0,05$

- Iteração 2
- $a = -0,75$; $f(a) = -0,28$
- $b = -0,5$; $f(b) = 0,11$
- $x_2 = (a+b)/2 = \dfrac{-0,75 + (-0,5)}{2} = -0,625$
- Condições de parada
  - $f(x_2) = f(-0,625) = -0,09$ *(não é igual a zero)*
  - $|b - a| = 0,25$ *(não terminou)*
  - $f(a) \cdot f(x_2) = (-0,28) \cdot (-0,09) > 0$
    Novo intervalo: $a \leftarrow x_2 = -0,625$

Exemplo: $f(x) = e^x + x$ $\qquad$ $erro = 0,05$

- Iteração 3
- $a = -0,625$; $f(a) = -0,09$
- $b = -0,5$; $f(b) = 0,11$
- $x_3 = (a+b)/2 = \dfrac{-0,625 + (-0,5)}{2} = -0,563$
- Condições de parada
  - $f(x_3) = f(-0,563) = 0,01$ *(não é igual a zero)*
  - $|b - a| = 0,125$ *(não terminou)*
  - $f(a) \cdot f(x_3) = (-0,09) \cdot (0,01) < 0$
    Novo intervalo: $b \leftarrow x_3 = -0,563$

Exemplo: $f(x) = e^x + x$ $\qquad$ $erro = 0,05$

- Iteração 4
- $a = -0,625$; $f(a) = -0,09$
- $b = -0,563$; $f(b) = 0,569$
- $x_4 = (a+b)/2 = \dfrac{-0,625 + (-0,563)}{2} = -0,594$
- Condições de parada
  - $f(x_4) = f(-0,594) = -0,04$ *(não é igual a zero)*
  - $|b - a| = 0,062$ *(não terminou)*
  - $f(a) \cdot f(x_4) = (-0,04) \cdot (-0,09) > 0$
    Novo intervalo: $a \leftarrow x_4 = -0,594$

Exemplo: $f(x) = e^x + x$ $\quad$ $erro = 0,05$

- Iteração 5
- $a = -0,594;\ f(a) = -0,04$
- $b = -0,563;\ f(b) = 0,569$
- $x_5 = (a+b)/2 = \dfrac{-0,594 + (-0,563)}{2} = -0,579$
- Condições de parada
  - $f(x_5) = f(-0,579) = -0,02$ *(não é igual a zero)*
  - $|b - a| = 0,031$ *(terminou!)*

$$x_5 = -0{,}579$$