CI-202 - Métodos Numéricos

Aula 07 - Zeros de equações transcendentes e polinomiais (Parte 2)

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

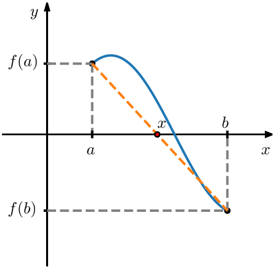
25/09/2024

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

1. Introdução
2. Método da Bisseção
3. Método da Falsa Posição (aula de hoje)
4. Método da Iteração Linear
5. Método de Newton-Raphson (aula de hoje)
6. Método da Secante

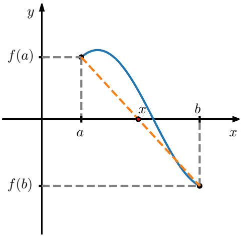
Método da Falsa Posição: Ideia principal

- Dado itervalo $[a, b]$ que contém raiz única



- Use uma reta como aproximação da função
  - aproximação da raíz: raíz x da equação da reta
- Aplica-se Teorema de Bolzano nos intervalos $[a, x]$ e $[x, b]$
  - Neste caso a raiz está no intervalo $[x, b]$
- Repita para o novo intervalo até que se tenha valor x dentro da margem de erro

Método da Falsa Posição: Ideia principal



- Qual o valor de x?
  - Seja $y = r(x)$ a equação da reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$
  - Equação da reta é $y - y' = m(x - x')$, onde:
    - m é o coeficiente angular da reta: i.e., $m = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$
    - (x', y') é um ponto qualquer da reta, por exemplo, $(a, f(a))$
  - Portanto, $\quad y - f(a) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a)$
  - $0 - f(a) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) \;\therefore\; -f(a) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a)$
  - $-f(a)\dfrac{a - b}{f(a) - f(b)} = (x - a) \;\therefore\; x = a - \dfrac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$

Algoritmo

Dado intervalo $[a, b]$ contendo a raiz única tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$,

$$\text{Faça} \quad x_k = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Se $f(a) \cdot f(x_k) < 0$
  - então $b \leftarrow x_n$
- Se $f(x_k) \cdot f(b) < 0$
  - então $a \leftarrow x_n$

Critério de Parada:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$ ou $f(x_n) = 0$

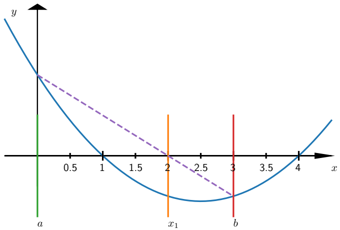
Obs: Primeira aproximação da raiz computada é x_1.

- Por padrão, definimos $x_0 = b$
  (em alguns casos, poderemos fazer $x_0 = a$)

Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$ $\qquad \epsilon = 0{,}1$

Iteração 1:

- $a = 0$; $f(a) = 4$
- $b = 3$; $f(b) = $ -2
- $x_1 = a - f(a) \cdot (b - a)/(f(b) - f(a)) = 2{,}0$

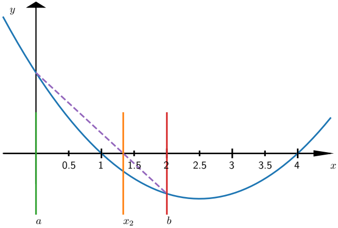


- Critérios de parada:
  - $|x_1 - x_0| = 1$ *continua* (pois $1 > \epsilon$)
  - $f(x_1) = $ -2.0 *continua* (pois $f(x_1) \neq 0$)
- Atualiza para próxima iteração:
  - $f(a)f(x_1)$ é negativo
  - $b \leftarrow x_1 = 2{,}0$

Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4 \qquad \epsilon = 0{,}1$

Iteração 2:

- $a = 0$; $f(a) = 4$
- $b = 2.0$; $f(b) =$ -2,0
- $x_2 = a - f(a) \cdot (b - a)/(f(b) - f(a)) = 1{,}33333$

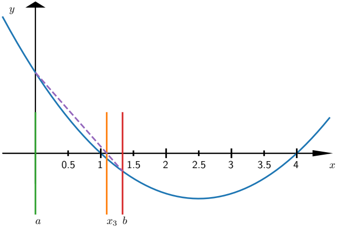


- Critérios de parada:
  - $f(x_2) =$ -0,88889 *continua*
  - $|x_2 - x_1| = 0{,}66667$ *continua*
- Próxima iteração:
  - $f(a)f(x_2)$ é negativo
  - $b \leftarrow x_2 = 1{,}33333$

Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$ $\qquad \epsilon = 0{,}1$

Iteração 3:

- $a = 0$; $f(a) = 4$
- $b = 1.33333$; $f(b) =$ -0.88889
- $x_3 = a - f(a) \cdot (b - a)/(f(b) - f(a)) = 1{,}09091$

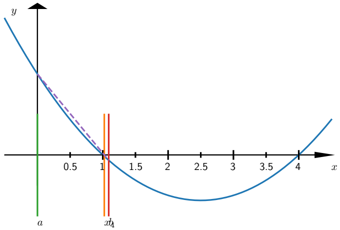


- Condições de parada:
  - $f(x_3) =$ -0,26446 *continua*
  - $|x_3 - x_2| = 0{,}24242$ *continua*
- Atualiza para próxima iteração:
  - $f(a)f(x_3)$ é negativo
  - $b \leftarrow x_3 = 1{,}09091$

Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$ $\epsilon = 0{,}1$

Iteração 4:

- $a = 0$; $f(a) = 4$
- $b = 1.09091$; $f(b) =$ -0.26446
- $x_4 = a - f(a) \cdot (b - a)/(f(b) - f(a)) = 1{,}02326$



- Critérios de parada:
  - $f(x_4) =$ -0,06923 *continua*
  - $|x_4 - x_3| = 0{,}06765$ *terminou!!!*

Resposta: $x_4 = 1{,}02326$

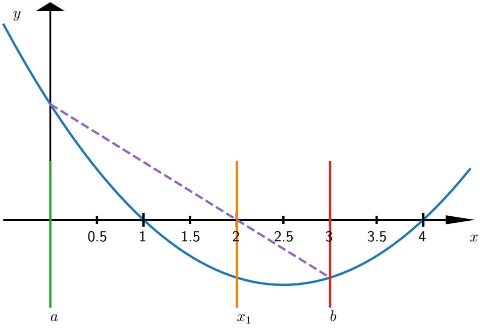
Comparação

- Método da bisseção
  - 1 iteração; $x = 1.5$
  - 2 iterações; $x = 0.75$
  - 3 iterações; $x = 1.125$
  - 4 iterações; $x = 0.9375$
  - 5 iterações; $x = 1.03125$
- Método da posição falsa
  - 1 iteração; $x = 2$
  - 2 iterações; $x = 1.33333$
  - 3 iterações; $x = 1.09091$
  - 4 iterações; $x = 1.02326$

Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Note: ponto a ficou fixo

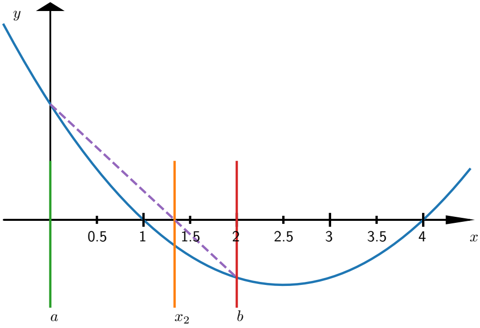
- Iteração 1



Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Note: ponto a ficou fixo

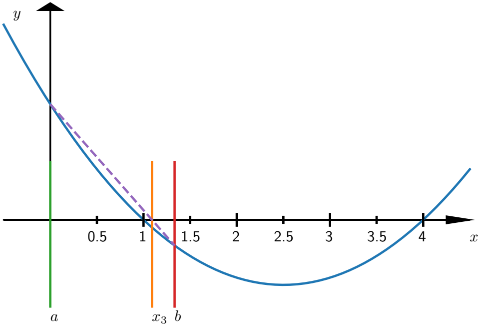
- Iteração 2



Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Note: ponto a ficou fixo

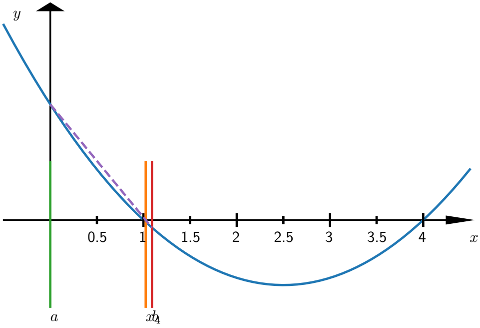
- Iteração 3



Exemplo $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Note: ponto a ficou fixo

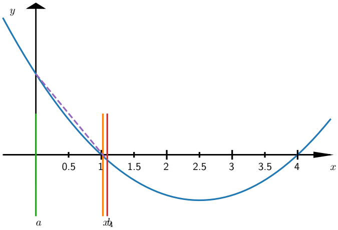
- Iteração 4



Em quais situações a fica fixo?

- $f(a) > 0$, $f(b) < 0$
- $f''(x)$ existe no intervalo e é positiva

Casos especiais



- Caso 1: $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ e $f''(x) > 0$: ponto fixo: a
- Caso 2: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e $f''(x) > 0$: ponto fixo: b
- Caso 3: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e $f''(x) < 0$: ponto fixo: a
- Caso 4: $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ e $f''(x) < 0$: ponto fixo: b

Algoritmo para estes casos particulares:

- Simplificação: sabemos de antemão o intervalo da próxima iteração
- Conhecido commo Método das Cordas