CI-202 - Métodos Numéricos

Aula 08 - Zeros de equações transcendentes e polinomiais (Parte 3)

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

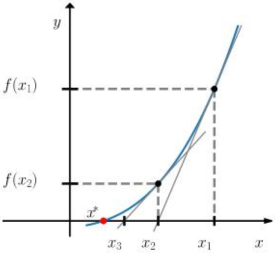
Universidade Federal do Paraná

25/09/2024

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

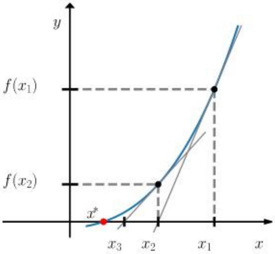
1. Introdução
2. Método da Bisseção
3. Método da Falsa Posição
4. Método da Iteração Linear
5. Método de Newton-Raphson (aula de hoje)
6. Método da Secante

Método de Newton-Raphson: Ideia principal



- $x_n = g(x_{n-1})$, para alguma função $g(x)$
  - Quem é $g(x)$?
  - A função tem relação com a reta tangente ao ponto x_{n-1} ou seja, a derivada de f no ponto x_{n-1}
- Equação da reta tangente ao ponto x_{n-1}:
  - $y - y_{n-1} = m(x - x_{n-1})$ Qual é o coeficiente angular?
  - Obs: na fórmula acima e na sequência, $y_k = f(x_k)$
  - Derivada no ponto x_{n-1} é o coef. angular da reta tangente a x_{n-1}
- $y - y_{n-1} = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$

Método de Newton-Raphson: Ideia principal



- $y - y_{n-1} = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$
  - Note: a reta tangente ao ponto x_{n-1} corta o eixo x exatamente no próximo valor para a aproximação para a raiz, i.e., no ponto $(x_n, 0)$
  - Vamos então substituir $(x_n, 0)$ na equação da reta
- $0 - y_{n-1} = f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$

$$\text{Logo,} \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$f'(x_{n-1}) \neq 0$$

Algoritmo

Dada $f(x)$ e $f'(x)$, com $f'(x) \neq 0$ em um intevalo $[a, b]$ pequeno o suficiente e dado $x_0 \in [a, b]$ e o erro ϵ

$$\text{Faça} \quad x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Critério de Parada:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$

Obsservações:

- Primeira aproximação da raiz computada é x_1. (x_0 é dado)
- Garantia de convergência: para intervalo pequeno suficiente

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad \epsilon = 0{,}01$

- Dados:
  - $f(x) = x^2 - 5x + 4$
  - $f'(x) = 2x - 5$
  - erro permitido $\epsilon = 0,01$
  - $x_0 = 8$
- Iteração 1:
  - $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - 5x_0 + 4}{2x_0 - 5} = 5.454545454545455$
  - $|x_1 - x_0| = 2.545454545454545$
  - continua

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $x_0 = 8;\ f(x) = 28$
- $x_1 = 5.454545454545455;\ f(x) = 6.47933884297521$
- $|x_1 - x_0| = 2.545454545454545$
- $x_2 = 4.358041958041958;\ f(x) = 1.2023199178443917$
- $|x_2 - x_1| = 1.0965034965034972$
- $x_3 = 4.034497079886617;\ f(x) = 0.10468128818055789$
- $|x_3 - x_2| = 0.3235448781553405$
- $x_4 = 4.000387765000109;\ f(x) = 0.0011634453620246177$
- $|x_4 - x_3| = 0.034109314886507924$
- $x_5 = 4.000000050107611;\ f(x) = 1.5032283684490721e - 07$
- $|x_5 - x_4| = 0.0003877148924980034$