CI-202 - Métodos Numéricos

Aula 09 - Zeros de equações transcendentes e polinomiais (Parte 4)

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

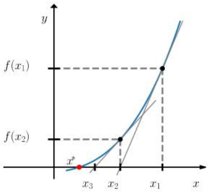
30/09/2024

Zeros de equações transcendentes e polinomiais

1. Introdução
2. Método da Bisseção
3. Método da Falsa Posição
4. Método da Iteração Linear (aula de hoje)
5. Método de Newton-Raphson
6. Método da Secante (aula de hoje)

Método da Iteração Linear: Ideia principal

Relembrando Método de Newton-Raphson



- $x_n = g(x_{n-1})$, para uma certa função g aplicada a x_{n-1}:

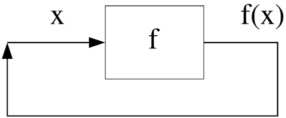
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad\qquad f'(x_{n-1}) \neq 0$$

- Método da Iteração Linear: vamos considerar outras funções $g(x)$:
  - Entretanto, primeiro vamos entender dois conceitos:
    (1) função iterativa   (2) ponto fixo *vs* raiz de função

Funções iterativas

- Função: recebe uma entrada e retorna uma saída.

- Função iterativa: a saída de uma iteração é entrada da próxima iteração.



Função vs Função Iterativa

- Considere a função: $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$
  - $f(1) =$4,5
  - $f(2) =$5
  - $f(3) =$5,5

    $\vdots$
- Considere a função iterativa $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$
  - $t = 0;\ x = 1;$
    $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 4 = 4,5$
  - $t = 1;\ x = 4,5;$
    $f(4,5) = \frac{1}{2} \cdot 4,5 + 4 = 6,25$
  - $t = 2; x = 6,25;$
    $f(6,25) = \frac{1}{2} \cdot 6,25 + 4 = 7,125$

    $\vdots$
- Outra maneira de tratar a função iterativa $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$
  - $x_0 = 1$
    $f(x_0) = \frac{1}{2} \cdot x_0 + 4 = 4,5$
    $f(x_1) = \frac{1}{2} \cdot x_1 + 4 = 6,25$
    $f(x_2) = \frac{1}{2} \cdot x_2 + 4 = 7,125$

    $\vdots$

Ponto fixo *vs* raiz de função

Primeiramente, o que é um ponto fixo?

- x^* é um ponto fixo de uma função f se $f(x^*) = x^*$.
- Exemplos:
  - 1 é um ponto fixo de $f(x) = x^2$, $f(1) = 1$;
  - 2 é um ponto fixo de $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $f(2) = 2$.

- Toda função tem ponto fixo? Não!
  - Exemplo: $f(x) = x + 1$ não tem ponto fixo

Ponto fixo *vs* raiz de função

Ainda, antes de ver a relação entre o ponto fixo e a raiz de uma função

- vamos ver a relação entre ponto fixo e funções iterativas.

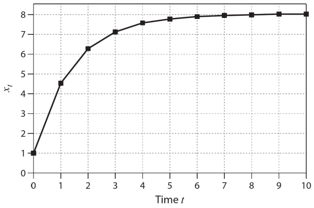
- Relembrando: considere a função iterativa $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$
  - $x_0 = 1$
    $f(x_0) = \frac{1}{2} \cdot x_0 + 4 = 4,5$
    $f(x_1) = \frac{1}{2} \cdot x_1 + 4 = 4,65$
    $f(x_2) = \frac{1}{2} \cdot x_2 + 4 = 7,125$
    $\vdots$

- Considere a série $\{x_t\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\qquad \lim_{t \to \infty} x_t = 8$

- Qual o ponto fixo função $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$?
  - $f(8) = 8$

Ponto fixo *vs* raiz de função

- Novamente, considere a função iterativa $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$
  - $x_0 = 1$
    $f(x_0) = \frac{1}{2} \cdot x_0 + 4 = 4,5$
    $f(x_1) = \frac{1}{2} \cdot x_1 + 4 = 4,65$
    $f(x_2) = \frac{1}{2} \cdot x_2 + 4 = 7,125$
    $\vdots$
  - $\lim_{t \to \infty} x_t = 8$



- se função iterativa converge, então converge para ponto fixo

Ponto fixo *vs* raiz de função

- Considere o problema de *resolver* a equação $e^x = x + 2$.
  Queremos encontrar x que satisfaça os dois lados da equação.

- fazendo $e^x - x - 2 = 0$
  - o que queremos o zero da função $f(x) = e^x - x - 2$.

- fazendo $e^x - 2 = x$
  - o que queremos o ponto fixo da função $g(x) = e^x - 2$.

- O zero da função f é o mesmo que o ponto fixo de g
  - Ideia: Para computar o zero de uma dada função f, computamos uma aproximação para o ponto fixo de g

Método da Iteração Linear

- Exemplo: Encontrar uma raiz da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$.
- Isole x na equação: $(x^2 + 4)/5 = x$
- Chame lado esquerdo de $g(x)$
- Encontre ponto fixo da função $g(x) = (x^2 + 4)/5$

Note: poderíamos ter isolado de outras formas:

$$\sqrt{5x - 4} = x$$

$$\frac{-4}{x - 5} = x$$

$$\frac{-4}{x} + 5 = x$$

Convergência

Teorema do ponto fixo: Seja $g : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua que satisfaça $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in [a, b]$.

- Então, existe um único ponto $x^* \in [a, b]$ tal que $g(x^*) = x^*$
- Além disso, para qualquer $x_0 \in [a, b]$, a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por: $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para x^* quando $n \to \infty$.

Algoritmo do Método da Iteração Linear

Dado: Dado $f(x)$ e $x_0 \in [a, b]$ e erro ϵ.

- Passo 1: Obtenha $g(x)$ respeitando as condições do Teorema do Ponto Fixo (se for possível).
- Iteração 1.
  - $x_1 = g(x_0)$
  - $|x_1 - x_0| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.
- Iteração 2.
  - $x_2 = g(x_1)$
  - $|x_2 - x_1| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.

$\vdots$

- Iteração n.
  - $x_n = g(x_{n-1})$
  - $|x_n - x_{n-1}| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $x^2 - 5x + 4 = 0$
- Possibilidades:

$$\frac{x^2+4}{5} = x$$

$$\sqrt{5x-4} = x$$

$$\frac{-4}{x-5} = x$$

$$\frac{-4}{x} + 5 = x$$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$\frac{x^2+4}{5} = x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+4}{5}\right) = \frac{2x}{5}$$

$$\left|\frac{2x}{5}\right| < 1 \text{ quando } -\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2}$$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

Dados:

- $g(x) = \frac{x^2+4}{5}$
- Um valor inicial no intervalo $[-2,5; 2,5]$, digamos $x_0 = 0$

- $x_1 = g(0) = 0,8$
- $|x_1 - x_0| = 0.8$
- $x_2 = g(4/5) = 0{,}928$
- $|x_2 - x_1| = 0{,}128$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $g(x) = \frac{x^2+4}{5}$
- Escolho um valor inicial no intervalo $[-2,5; 2,5]$.
- Digamos: $x_0 = 0$
- $x_1 = g(0) = 0,8$
- $x_2 = g(4/5) = 0,928$
- $x_3 = 0.9722368$
- $x_4 = 0.989048879$
- $x_5 = 0.995643537$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $x^2 - 5x + 4 = 0$
- Possibilidades:

$$\frac{x^2 + 4}{5} = x$$

$$\sqrt{\mathbf{5x - 4}} = \mathbf{x}$$

$$\frac{-4}{x - 5} = x$$

$$\frac{-4}{x} + 5 = x$$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$g(x) = \sqrt{5x - 4}$$

- É mais difícil calcular a derivada e o intervalo
- Chutamos um valor inicial, e verificamos se ocorre a convergencia
- $x_0 = 2$
- $x_1 = ?$
- $x_2 = ?$
- $x_3 = ?$
- $\vdots$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$\sqrt{5x-4} = x$$

- É mais difícil calcular a derivada e o intervalo (exercício)
- Seja $x_0 = 2$
- $x_1 = 2.449489742783178$
- $|x_1 - x_0| = 0.4494897427831779$
- $x_2 = 2.871837167026691$
- $|x_2 - x_1| = 0.422347424243513$
- $x_3 = 3.218568911043145$
- $|x_3 - x_2| = 0.3467317440164539$
- $x_4 = 3.477476751211389 8$
- $|x_4 - x_3| = 0.258907840168245$
- $x_5 = 3.6588773901371647$
- $|x_5 - x_4| = 0.18140063892577496$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $x_6 = 3.780791841755616$
- $|x_6 - x_5| = 0.12191445161845138$
- $x_7 = 3.86056462305426$
- $|x_7 - x_6| = 0.07977278129864374$
- $x_8 = 3.911882298238445$
- $|x_8 - x_7| = 0.05131767518418506$
- $x_9 = 3.9445419875052954$
- $|x_9 - x_8| = 0.03265968926685048$
- $x_{10} = 3.9651872512564244$
- $|x_{10} - x_9| = 0.02064526375112896$
- $x_{11} = 3.978182531795408$
- $|x_{11} - x_{10}| = 0.012995280538983689$
- $x_{12} = 3.986340760519231$
- $|x_{12} - x_{11}| = 0.00815822872382288$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $x^2 - 5x + 4 = 0$
- Possibilidades:

$$\frac{x^2 + 4}{5} = x$$

$$\sqrt{5x - 4} = x$$

$$\frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{x - 5}} = \mathbf{x}$$

$$\frac{-4}{x} + 5 = x$$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$g(x) = \frac{-4}{x-5}$$

- $x_0 = 2$
- $x_1 =?$
- $x_2 =?$
- $x_3 =?$
- $x_4 =?$
- $x_5 =?$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$g(x) = \frac{-4}{x - 5}$$

- $x_0 = 2$
- $x_1 = 1.3333333333333333$
- $|x_1 - x_0| = 0.6666666666666667$
- $x_2 = 1.0909090909090908$
- $|x_2 - x_1| = 0.2424242424242424243$
- $x_3 = 1.0232558139534884$
- $|x_3 - x_2| = 0.06765327695560241$
- $x_4 = 1.0058479532163742$
- $|x_4 - x_3| = 0.017407860737371142$
- $x_5 = 1.0014641288433384$
- $|x_5 - x_4| = 0.0043838243730358861$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $x^2 - 5x + 4 = 0$
- Possibilidades:

$$\frac{x^2 + 4}{5} = x$$

$$\sqrt{5x - 4} = x$$

$$\frac{-4}{x - 5} = x$$

$$\mathbf{\frac{-4}{x} + 5 = x}$$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$g(x) = \frac{-4}{x} + 5$$

- $x_0 = 2$
- $x_1 = ?$
- $x_2 = ?$
- $x_3 = ?$
- $x_4 = ?$
- $x_5 = ?$
- $x_6 = ?$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$g(x) = \frac{-4}{x} + 5$$

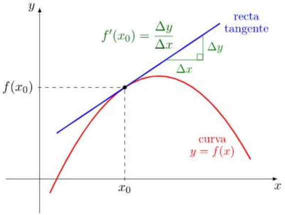
- $x_0 = 2$
- $x_1 = 3.0$
- $|x_1 - x_0| = 1.0$
- $x_2 = 3.6666666666666667$
- $|x_2 - x_1| = 0.6666666666666667$
- $x_3 = 3.909090909090909$
- $|x_3 - x_2| = 0.2424242424242422$
- $x_4 = 3.9767441860465116$
- $|x_4 - x_3| = 0.06765327695560241$
- $x_5 = 3.9941520467836256$
- $|x_5 - x_4| = 0.017407860737113978$
- $x_6 = 3.998535871156662$
- $|x_6 - x_5| = 0.004383824373036305$

Método das Secantes

- Método de Newton-Raphson: Também conhecido por método das tangentes

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Lembrando da definição de derivada: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



Ideia: Quando computar x_n, usar aproximação para derivada em x_{n-1}:

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

Método das Secantes

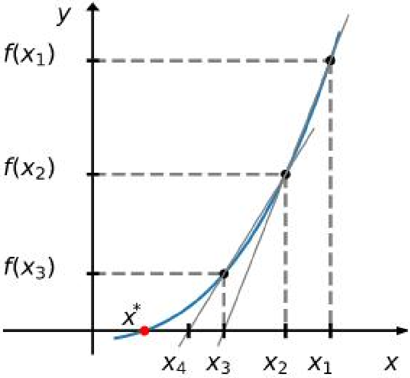
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}, \quad n \geq 2$$

Interpretação geométrica

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}, \quad n \geq 2$$



Algoritmo do Método das secantes

Problema: obtenha uma raiz da função $f(x)$.

- Entrada: $f(x)$; dois valores iniciais x_0 e x_1 próximos à raiz a ser encontrada; e o erro ϵ.
- Iteração 1.
  - $x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$
  - $|x_2 - x_1| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.
- Iteração 2.
  - $x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$
  - $|x_3 - x_2| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.

$\vdots$

- Iteração n.
  - $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$
  - $|x_n - x_{n-1}| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$
- $f(x) = x^2 - 5x + 4$
- erro permitido $\epsilon = 0,01$
- Usemos apenas 2 casas decimais (com arredondamento)

- Dado $x_0 = 8$ e $x_1 = 9$

- $x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} =$
  $x_1 - (x_1^2 - 5x_1 + 4)(x_1 - x_0)/(x_1^2 - 5x_1 - x_0^2 + 5x_0) = 5,67$
- $|x_2 - x_1| = 3,33$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $x_1 = 9$
- $x_2 = 5,67$
- $x_3 = x_2 - (x_2^2 - 5x_2 + 4)(x_2 - x_1)/(x_2^2 - 5x_2 - x_1^2 + 5x_1) = 4,86$
- $|x_3 - x_2| = 0,81$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $f(x) = x^2 - 5x + 4$
- $x_2 = 5,67$
- $x_3 = 4,86$
- $x_4 = x_3 - (x_3^2 - 5x_3 + 4)(x_3 - x_2)/(x_3^2 - 5x_3 - x_2^2 + 5x_2) = 4,26$
- $|x_4 - x_3| = 0,60$

Exemplo $x^2 - 5x + 4 = 0$

- $f(x) = x^2 - 5x + 4$
- $x_3 = 4,86$
- $x_4 = 4,26$
- $x_5 = 4,05$
- $|x_5 - x_4| = 0,21$
- $x_6 = 4,00$
- $|x_6 - x_5| = 0,05$

Encoutrou $f(x) = 0$*