

CI-202 - Métodos Numéricos

Sistemas de Equações Lineares (Parte 1)

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

07/10/2024

Sistemas de equações lineares

- ▶ Introdução
- ▶ Métodos Diretos
 - ▶ Regra de Cramer
 - ▶ Método da Eliminação de Gauss
 - ▶ Método de Jordan
 - ▶ Fatoração LU
- ▶ Métodos Iterativos
 - ▶ Método de Gauss-Jacobi
 - ▶ Método de Gauss-Seidel
 - ▶ Método da Relaxação

Introdução: Sistemas lineares

- ▶ No tópico anterior, tínhamos equações que podiam ser não lineares:
 - ▶ Podiam ser polinômios, funções transcendentais, etc
 - ▶ Mas, as equações tinham apenas uma variável
- ▶ Neste tópico: Apenas equações lineares, mas
 - ▶ equações tem mais de uma variável (e.g., $10x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$)
 - ▶ sistemas com mais de uma equação simultânea
- ▶ Sistema linear com m equações e n incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- ▶ Notação:
 - ▶ a_{ij} : coeficientes;
 - ▶ x_j : incógnitas;
 - ▶ b_j : termos independentes.

Sistemas lineares

- Um sistema linear pode ser escrito na *forma matricial* $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

A : é chamada de *matriz dos coeficientes*

x : *vetor das incógnitas*

b *vetor dos termos independentes (termos constantes).*

Classificação quanto ao número de soluções

- ▶ Compatível (tem solução)
 - ▶ *Determinado*: O sistema tem solução única.
 - ▶ *Indeterminado*: O sistema tem infinitas soluções.
- ▶ Incompatível
 - ▶ O sistema não tem solução.

Sistemas lineares

Considere um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:

- ▶ $\mathbf{v}$ é tratado como n -tupla ou como vetor coluna de dimensão n
componentes da tupla/vetor são v_i

i.e., $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ou $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

- ▶ Notação: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são as colunas da matriz A , escrevemos

$$A = [\alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_n]$$

- ▶ A matriz identidade é denotada $\mathbb{I}$

Sistemas lineares

Dado um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

- ▶ A *matriz completa* (ou *matriz estendida*) do sistema, denotada $[A|\mathbf{b}]$ é:

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

- ▶ Se $b_i = 0$, para $i = 1, \dots, m$, o sistema é dito homogêneo.
- ▶ Note: **Sistema homogêneo $\Rightarrow$ compatível**
Admite pelo menos a solução trivial, $x_j = 0, j = 1, 2, \dots, m$.

Métodos Diretos (Algoritmos Diretos)

- ▶ Um método é dito direto quando a solução exata X do sistema linear é obtida realizando-se um número finito de operações aritméticas.
- ▶ Exemplos: Regra de Cramer, Método da Eliminação de Gauss (ou triangulação) e Método de Jordan.
- ▶ Veremos alguns destes métodos, assim como métodos indiretos nesta disciplina.

Definições Elementares

- ▶ Dada matriz M de dimensão n , $\det(M)$ é o determinante de M

Para qualquer $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$$

$M_{i,j}$ é o determinante da submatriz de M sem a linha i e coluna j

Exemplo:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

- ▶ Teorema: Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Para qualquer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução única se e somente se $\det(A) \neq 0$

Definições Elementares

Seja $Ax = \mathbf{b}$ com n equações e n incógnitas.

► A_i : matriz obtida de A trocando a coluna i pelo vetor $\mathbf{b}$

Por exemplo,

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ então } A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Métodos Diretos – Regra de Cramer

Seja $Ax = b$ um sistema linear, onde A tem dimensão n e $\det(A) \neq 0$.

$$\text{Regra de Cramer: } x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

- Prova: mais tarde
- Antes, um exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Métodos Diretos – Regra de Cramer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}} =$$

Métodos Diretos — regra de Cramer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{120}{24} = 5$$

Métodos Diretos — regra de Cramer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{48}{24} = 2$$

Métodos Diretos – Regra de Cramer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{96}{24} = 4$$

Métodos Diretos – Regra de Cramer

Portanto, para o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A solução é $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Métodos Diretos – Regra de Cramer

Exercício: Aplique a Regra de Cramer para resolver o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{A solução é } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_3)}{\det(A)} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer: Demonstração

Teorema: Considere um sistema linear $Ax = b$, tal que A é uma matriz de dimensão n que admite inversa. Então, para $i = 1, \dots, n$, $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$

Prova: Seja $A = [\alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_n]$, $X_1 = [x | \alpha_2 | \alpha_3 | \dots | \alpha_n]$ e $\mathbb{I} = [\iota_1 | \iota_2 | \dots | \iota_n]$
($\mathbb{I}$ é a matriz identidade)

Fato 1: $x = A^{-1}b$ ($Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$)

Fato 2: $\iota_i = A^{-1}\alpha_i$ (da definição de multiplicação, $A\iota_i = \alpha_i$.
daí $A\iota_i = \alpha_i \Rightarrow A^{-1}A\iota_i = A^{-1}\alpha_i \Rightarrow \iota_i = A^{-1}\alpha_i$)

Fato 3: $\det(X_1) = x_1$ (direto da definição de determinante)

Lembrando que $A_i = [b | \alpha_2 | \alpha_3 | \dots | \alpha_n]$, temos

$$A^{-1} \cdot A_1 = A^{-1} \cdot [b | \alpha_2 | \alpha_3 | \dots | \alpha_n] = \underbrace{[x | \alpha_2 | \alpha_3 | \dots | \alpha_n]}_{\text{Fatos 1 e 2}} = X$$

$x_1 = \det(X_1)$ (Fato 3)

$$= \det(A^{-1}A_1) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A_1) = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$