

CI-202 - Métodos Numéricos

Sistemas de Equações Lineares (Parte 2)

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

14/10/2024

Sistemas de equações lineares

- ▶ Introdução
- ▶ Métodos Diretos
 - ▶ Regra de Cramer
 - ▶ Método da Eliminação de Gauss
 - ▶ Método da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial
 - ▶ Método de Gauss-Jordan
 - ▶ Fatoração LU
- ▶ Métodos Iterativos
 - ▶ Método de Gauss-Jacobi
 - ▶ Método de Gauss-Seidel
 - ▶ Método da Relaxação

Matrizes triangulares

- ▶ Matrizes triangular superior: Elementos abaixo da diagonal principal são zero:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Matrizes triangular inferior: Elementos acima da diagonal principal são zero:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ Matrizes diagonal: Apenas elementos da diagonal principal não são nulos

Sistemas com matrizes triangulares superiores

Caso de sistemas lineares com matrizes triangulares superiores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Solução é imediata:

- ▶ Da linha 3, a equação é $-2x_3 = -2$, ou seja, $x_3 = 1$.
- ▶ Da linha 2, $-x_2 - 3x_3 = -2$, substitua 1 em x_3 . i.e., $x_2 = -1$
- ▶ Da linha 1, a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ implica em $x_1 = 1$.

- ▶ Caso das matrizes triangulares inferiores é análogo.

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

- ▶ O método da eliminação de Gauss (escalonamento de matrizes):
Consiste em transformar um sistema linear em outro sistema linear equivalente que seja *triangular superior*.

Sistemas lineares equivalentes: sistema que têm as mesmas soluções.

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

- ▶ Por exemplo, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Usamos uma série de “transformações” para obter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- ▶ Aí obtemos a solução diretamente

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

- **Teorema:** Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema linear. Aplicando, sobre as equações deste sistema, uma sequência de operações elementares, escolhidas entre as três opções abaixo:
- (i) trocar a ordem de duas equações;
 - (ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula;
 - (iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

Obtém-se um novo sistema $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ equivalente a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

- ▶ Resolva o sistema

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

- ▶ Primeira etapa: criamos a matriz estendida.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

- ▶ Primeira etapa: criamos a matriz estendida.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

- ▶ Segunda etapa: escalonamos a matriz
Vamos fazer o escalonamento “livremente”
(depois faremos de maneira metódica)
- ▶ Primeiro passo (zerar a primeira coluna abaixo da diagonal principal):
 - ▶ 2ª linha $\leftarrow$ 2ª linha $- 4 \times$ 1ª linha
 - ▶ 3ª linha $\leftarrow$ 3ª linha $- 2 \times$ 1ª linha.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

- Permutamos a 2ª linha com a 3ª linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

- A matriz está na forma triangular.

Fazendo-se as substituições,

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1$$

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

Se, durante o escalonamento, uma linha da matriz for zerada?

- ▶ Ou seja, surgir equação do tipo:

$$0 + 0 + \cdots + 0 = b_m$$

1. Se $b_m = 0$, elimina-se a equação e continua-se o escalonamento;
2. Se $b_m \neq 0$, conclui-se que o sistema é incompatível.

- ▶ Suponha que temos um sistema com m equações

Quando eliminarmos uma equação (caso 1 acima), o quê podemos dizer sobre as equações? Uma equação era combinação linear da outra.

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

Dada uma matriz, como no exemplo abaixo,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right]$$

De maneira geral,

► Escolha pivo a_{ii} (neste exemplo, vamos olhar para a_{11})

► Para cada linha $L_j, j > i$, calcule fator $m_{ji} = -\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$

► linha L_2 : $m_{21} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$

► linha L_3 : $m_{31} = -\frac{-2}{2} = 1$

► Troque linha L_j por $L_j + m_{ji} \cdot L_i$

► troque L_2 por $L_2 + \frac{3}{2} \cdot L_1$ i.e., $[-3 \ -1 \ 2 \ | \ -11]$ por $[0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ | \ 1]$

► troque L_3 por $L_3 + 1 \cdot L_1$ i.e., $[-2 \ -1 \ 2 \ | \ -3]$ por $[0 \ 2 \ 1 \ | \ 5]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

Métodos Diretos – Eliminação de Gauss

Dada uma matriz, como no exemplo abaixo,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

- ▶ Seja $[A^{(0)}|b^{(0)}] = [A|b]$
- ▶ Etapa $i = 1, 2, \dots, n-1$
 - ▶ Obtenha $[A^{(i)}|b^{(i)}]$ a partir de $[A^{(i-1)}|b^{(i-1)}]$
fazendo operações para zerar elementos abaixo na coluna do pivô a_{ii}

Como zerar elementos abaixo na coluna do pivô a_{ii} ?

- ▶ Para cada linha $L_j, j > i$
 - ▶ calcule fator $m_{ji} = -\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$
 - ▶ troque linha L_j por $L_j + m_{ji} \cdot L_i$
- ▶ Se posição a_{ii} for nula?
 - ▶ troque, antes, L_i por alguma linha L_j abaixo na coluna com $a_{ji} \neq 0$
 - ▶ obs: se não existir linha com $a_{ji} \neq 0$, etapa está finalizada!

Eliminação de Gauss

Dada $[A^{(0)}|b^{(0)}] = [A|b]$, onde A tem dimensão n ,

$$[A^{(0)}|b^{(0)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right].$$

► Etapa $i = 1, 2, \dots, n-1$:

► Obtenha $[A^{(i)}|b^{(i)}]$ a partir de $[A^{(i-1)}|b^{(i-1)}]$ fazendo

Para cada $j > i$, calcule $m_{ji} = -\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ e troque L_j por $L_j + m_{ji} \cdot L_i$

(caso $a_{ii} = 0$, fazer troca de linhas)

$$[A^{(n-1)}|b^{(n-1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right].$$

Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial

Dada $[A^{(0)}|b^{(0)}] = [A|b]$, onde A tem dimensão n ,

$$[A^{(0)}|b^{(0)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right].$$

► Etapa $i = 1, 2, \dots, n$:

► Obtenha $[A^{(i)}|b^{(i)}]$ a partir de $[A^{(i-1)}|b^{(i-1)}]$ fazendo

Para cada $j > i$, calcule $m_{ji} = -\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ e troque L_j por $L_j + m_{ji} \cdot L_i$

Antes de zerar elementos abaixo de a_{ii} , troque L_i por L_j , $j > i$
para garantir que $|a_{ii}| \geq |a_{ji}|$, para todo $j > i$

$$[A^{(n-1)}|b^{(n-1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right].$$

Eliminação de Gauss-Jordan

Dada $[A^{(0)}|b^{(0)}] = [A|b]$, onde A tem dimensão n ,

- ▶ Aplica Eliminação de Gauss para obter

$$[A^{(n-1)}|b^{(n-1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right].$$

- ▶ Continua processo, fazendo procedimento análogo para zerar elementos acima, na coluna de cada pivo:
 - ▶ Primeiro zera elementos acima, na coluna de a'_{nn} ;
 - ▶ Depois zera elementos acima na coluna de a'_{n-1n-1}
 - ▶ Assim por diante até zerar elementos na coluna acima de a'_{22}
 - ▶ Termina com matriz:

$$[A^{(2n-2)}|b^{(2n-2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a''_{11} & 0 & \cdots & 0 & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & \cdots & 0 & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a''_{nn} & b''_n \end{array} \right].$$

- ▶ Pode-se usar pivoteamento parcial em Gauss-Jordan também

Exemplo de Eliminação Gaussiana

Resolva o sistema abaixo usando Eliminação Gaussiana:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Resolução:

► Matriz estendida inicial:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

Exemplo de Eliminação Gaussiana

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

Etapa 1:

- ▶ Como $a_{11}^{(0)} \neq 0$, não precisamos fazer trocas de linhas
- ▶ Portanto,

$$\text{Pivô: } a_{11}^{(0)} = 3$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 1/3$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 4/3$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array} \right)$$

Exemplo de Eliminação Gaussiana

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array} \right)$$

Etapla 2:

- ▶ Como $a_{22}^{(0)} \neq 0$, não precisamos fazer trocas de linhas
- ▶ Portanto,

$$\text{Pivô: } a_{22}^{(1)} = 1/3$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2$$

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right)$$

Exemplo de Eliminação Gaussiana

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right)$$

Temos matriz triangular superior

- Agora, colocamos em forma de sistema novamente:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \quad +1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ \quad \quad -8x_3 = 0 \end{cases}$$

- Com isso, a solução é:

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Eliminação Gaussiana (pivoteamento parcial)

Resolva o seguinte sistema usando Eliminação Gaussiana com pivoteamento parcial:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Resolução:

► Matriz estendida inicial:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

Exemplo: Eliminação Gaussiana (pivoteamento parcial)

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

Etapla 1:

- ▶ Na coluna 1, maior valor em módulo está em L_3 . Portanto,

$$L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

- ▶ Agora temos uma nova matriz $[A^{(0)}|b^{(0)}]$ com pivô $a_{11}^{(0)} = 4$. Portanto,

$$L_2 \leftarrow L_2 - 1/4L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3/4L_1$$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0.25 & 2.5 & 1.25 \\ 0 & -0.25 & 5.5 & -1.25 \end{array} \right)$$

Exemplo: Eliminação Gaussiana (pivoteamento parcial)

$$[A^{(1)}|b^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0,25 & 2,5 & 1,25 \\ 0 & -0,25 & 5,5 & -1,25 \end{array} \right].$$

Etapa 2:

- ▶ Na coluna 2, empate no maior valor em módulo. Portanto,
- ▶ $[A^{(1)}|b^{(1)}]$ não muda e o pivo é $a_{11}^{(1)} = 0,25$ e $m_{32} = 1$
- ▶ Troca L_3 por $L_3 + L_2$:

$$[A^{(2)}|b^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0,25 & 2,5 & 1,25 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right].$$

Em forma de sistema:

$$\begin{cases} 4x_3 + 3x_2 - 2x_1 = 3 \\ 0,25x_2 + 2,5x_3 = 1,25 \\ 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Com isso $x = (-3, 5, 0)$

Fatoração LU de matrizes

- Considere o sistema linear $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

- Suponha aplicamos Eliminação Gaussiana e obtemos $A'x = b'$
 - A partir da matriz triangularizada A' e b' é fácil obter o vetor x
- Agora, suponha que queiramos resolver o sistema linear $Ax = c$
 - Precisamos repetir tudo novamente?
- **Fatoração LU:** Vamos encontrar matrizes L e U triangulares tal que $A = LU$ (uma triangular superior e outra inferior)
 - Com isso, dado b ,
 - $Ax = b \Rightarrow LUx = b$ seja $Ux = y$
 - Com isso, $Ly = b$
 - Encontro y e depois resolvo $Ux = y$
 - Agora, se quero resolver um novo sistema $Ax = c$, faço a mesma coisa

Fatoração LU para computar matriz inversa

- Caso particular em que queremos resolver $Ax = b$ para vários vetores de b consecutivos: Calcular inversa de A i.e., calcular X , tal que $AX = I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Aqui queremos resolver $Ax_i = \tau_i$
 x_i é a i -ésima coluna de X
 τ_i é a i -ésima coluna da identidade. para $i = 1, \dots, n$,

Eliminação Gaussiana: primeira coluna

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} m_{21} = a_{21}/a_{11} \\ m_{31} = a_{31}/a_{11} \\ m_{41} = a_{41}/a_{11} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array} \right] \end{array}$$

m_{21}
 m_{31}
 m_{41}

$$b_{22} = a_{22} - m_{21} a_{12}$$

Eliminação Gaussiana: segunda coluna

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} m_{32} = b_{32}/b_{22} \\ m_{42} = b_{42}/b_{22} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbf{A}_2 \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \end{array} \right] \end{array}$$

m_{21}

$m_{31} \quad m_{32}$

$m_{41} \quad m_{42}$

Eliminação Gaussiana: terceira coluna

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}_2 \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \end{array} \right] \end{array} \quad m_{43} = c_{43}/c_{44} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbf{A}_3 \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{array} \right] \end{array}$$

m_{21}
 $m_{31} \quad m_{32}$
 $m_{41} \quad m_{42} \quad m_{43}$

Fatorando a matriz A

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{m}_{21} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{m}_{31} & \mathbf{m}_{32} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{m}_{41} & \mathbf{m}_{42} & \mathbf{m}_{43} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A_3} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Fatorando a matriz A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_{21}a_{12} + b_{22} &= m_{21}a_{12} + (a_{22} - a_{12}m_{21}) \\ &= a_{12}a_{21}/a_{11} + a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11} \\ &= a_{22} \end{aligned}$$

Fatorando a matriz A

$$\begin{array}{c} \mathbf{L} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{m}_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{m}_{31} & \mathbf{m}_{32} & 1 & 0 \\ \mathbf{m}_{41} & \mathbf{m}_{42} & \mathbf{m}_{43} & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{U} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right] \end{array}$$

- Fatoramos A em duas matrizes triangulares L e U

Fatoração LU para cálculo de inversa

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \left[\begin{array}{ccc} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{X} \\ \left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Fatoração LU para cálculo de inversa

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & & \\ \left[\begin{array}{ccc} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} m_{21} = 2.56 \\ m_{31} = 5.76 \end{array} & \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{ccc} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ m_{32} = 3.5 \end{array} \\ & & \\ \xrightarrow{\quad} & \left[\begin{array}{ccc} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{array} \right] \\ & \mathbf{U} & \mathbf{L} \end{array}$$

Matriz U é obtida escalonando A

L é obtida usando os multiplicadores do escalonamento

Fatoração LU para cálculo de inversa

Exemplo 1: Calculando a matriz inversa A^{-1}

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ \underbrace{LU}_{y} x = b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} Ly = b \\ Ux = y \end{array}$$

L

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.56 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

U

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.56 \\ 3.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04762 \\ -0.9524 \\ 4.571 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU para cálculo de inversa

Exemplo 1: Calculando a matriz inversa A^{-1}

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ \underbrace{LU}_{y}x = b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} Ly = b \\ Ux = y \end{array}$$

L

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3.5 \end{bmatrix}$$

U

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.08333 \\ 1.417 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU para cálculo de inversa

Exemplo 1: Calculando a matriz inversa A^{-1}

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ LUx = b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} Ly = b \\ Ux = y \end{array}$$

L

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

U

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03571 \\ -0.4643 \\ 1.429 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU para cálculo de inversa

Exemplo 1: Matriz inversa A^{-1}

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ \underbrace{LU}_{y}x = b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} Ly = b \\ Ux = y \end{array}$$

A^{-1}

$$\begin{bmatrix} 0.04762 & -0.08333 & 0.03571 \\ -0.9524 & 1.417 & -0.4643 \\ 4.571 & -5.000 & 1.429 \end{bmatrix}$$