

CI-202 - Métodos Numéricos

Sistemas de Equações Lineares (Parte 3)

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

28/10/2024

Sistemas de equações lineares

- ▶ Introdução
- ▶ Métodos Diretos
 - ▶ Regra de Cramer
 - ▶ Método da Eliminação de Gauss
 - ▶ Método da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial
 - ▶ Método de Gauss-Jordan
 - ▶ Fatoração LU
- ▶ Métodos Iterativos
 - ▶ Método de Gauss-Jacobi (algébrico)
 - ▶ Método de Gauss-Seidel (algébrico)
 - ▶ Método de Gauss-Jacobi (matricial)
 - ▶ Método de Gauss-Seidel (matricial)
 - ▶ Método da Relaxação

Resolvendo sistemas de equações lineares

Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema linear

- ▶ Regra de Cramer
 - ▶ Matriz A quadrada, $\det(A) \neq 0$
 - ▶ Número de operações cresce (mais que) exponencialmente
- ▶ Método de Gauss (Gauss-Jordan, pivoteamento parcial)
 - ▶ Qualquer matriz A (quadrada e $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ solução única)
 - ▶ Número de operações cresce polinomialmente ($\approx n^3$)
- ▶ Fatoração LU
 - ▶ via Gauss (A quadrada, $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ fatoração existe)
 - ▶ Número de operações cresce polinomialmente ($\approx n^3$)
- ▶ Métodos Iterativos (Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel, Relaxação)
 - ▶ Matriz A quadrada, $\det(A) \neq 0$, diagonalmente dominante
 - ▶ Número de operações depende da precisão desejada
 - ▶ Eficiente para matrizes esparsas

Matrizes diagonalmente dominantes

- Considere a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- A matriz A é **diagonalmente dominante** se $\forall i, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ chamado de “critério das linhas”

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ é diagonalmente dominante.

Definições alternativas (não vamos usar):

- Às vezes, na definição acima use-se a fórmula $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.
(nestes contextos, diz-se que matriz é estritamente diagonalmente dominante apenas quando $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$)
- Às vezes, a definição expressão “diagonalmente dominante” se refere às colunas da matriz, i.e., $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$ (ou também $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$)

Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

- Isolando cada x_i de cada linha i :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j \neq 1} a_{1j}x_j \right) \quad a_{11} \neq 0$$

$$x_1 = g(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - \sum_{j \neq 2} a_{2j}x_j \right) \quad a_{22} \neq 0$$

$$x_2 = g(x_1, x_3, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - \sum_{j \neq n} a_{nj}x_j \right) \quad a_{nn} \neq 0$$

$$x_n = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

mesma ideia dos métodos do ponto fixo
aplica-se g iteradamente

Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

- Mais precisamente, para linha i , $i = 1, 2, \dots, n$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad a_{ii} \neq 0$$

toma-se, por exemplo, valor inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = (0, 0, \dots, 0)$

- Mas pode-se tomar qualquer $\mathbf{x}^{(0)}$ desde que as condições de convergência forem satisfeitas: **a matriz A deve ser diagonalmente dominante.**
- Além de A , $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_0$, o erro ϵ também é parte da entrada
- Execução até condição de erro atendida (erro absoluto ou relativo)

Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- ▶ Dado A , $\mathbf{b}$, ϵ e $\mathbf{x}^{(0)}$
 - ▶ Restrição: $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ (obrigatório)
 - ▶ Garantia de convergência: Matriz A é diagonalmente dominante

- ▶ Algoritmo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

- ▶ Conjunto de fórmulas acima tipicamente chamadas de *funções de iteração*
- ▶ Condição de parada pode ser por erro absoluto ou relativo:
 - ▶ Condição de parada por erro absoluto:

$$d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$$

- ▶ Condição de parada por erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}$$

Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

► Exemplo:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

► Sendo $\epsilon = 0,05$ com **erro relativo** e valor inicial:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

► **Resolução:** Começamos com as funções de iteração:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

► Funções de iteração:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) \end{cases}$$

► Iteração $k = 0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(7 - 2 * (-1.6) - 0.6) = 0.96 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(-8 - 0.7 - 0.6) = -1.86 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(6 - 2 * 0.7 - 3 * (-1.6)) = 0.94 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix}$$

Calculando Erro:

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.34$$

$$d_r^{(1)} = \frac{0.34}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(1)}|} = \frac{0.34}{1.86} = 0.1828 > \varepsilon$$

Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

► Iteração $k = 0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(7 - 2 * (-1.6) - 0.6) = 0.96 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(-8 - 0.7 - 0.6) = -1.86 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(6 - 2 * 0.7 - 3 * (-1.6)) = 0.94 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix}$$

Calculando Erro:

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.34$$

$$d_r^{(1)} = \frac{0.34}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(1)}|} = \frac{0.34}{1.86} = 0.1828 > \varepsilon$$

► Próximas iterações:

Iteração $K = 1$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{pmatrix}$$

$$d_r^{(2)} = 0.0606 > \varepsilon$$

Iteração $K = 2$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix}$$

$$d_r^{(3)} = 0.0163 < \varepsilon$$

► Resposta: $x^{(3)}$

Convergência do Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- ▶ Exemplo anterior não verificamos a convergência:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

- ▶ Tratava-se de uma matriz diagonalmente dominante.
- ▶ Outro exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

Neste caso não temos uma matriz diagonalmente dominante

Convergência do Método de Gauss-Jacobi (Algébrico)

- ▶ Outro exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

Neste caso não temos uma matriz diagonalmente dominante

- ▶ Trocando linhas: $L_1 \longleftrightarrow L_2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

- ▶ Compensa trocar linhas ou mesmo fazer pivoteamento?

Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

- ▶ Dado A , $\mathbf{b}$, ϵ e $\mathbf{x}^{(0)}$
 - ▶ Restrição: $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ (obrigatório)
 - ▶ Garantia de convergência: Matriz A é diagonalmente dominante

- ▶ Algoritmo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

- ▶ Funções de iteração utilizam versão mais atualmente computada de x_i
- ▶ Condição de parada pode ser por erro absoluto ou relativo:
 - ▶ Condição de parada por erro absoluto:

$$d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$$

- ▶ Condição de parada por erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}$$

Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

► Exemplo:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

► Sendo $\epsilon = 0,05$ com **erro relativo** e valor inicial:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► **Resolução:** Começamos com as funções de iteração:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1.5 - 0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

► Funções de iteração:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1.5 - 0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

► Iteração $k = 0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0.2 * 0 - 0.2 * 0 = 1 \\ x_2^{(1)} = 1.5 - 0.75 * 1 - 0.25 * 0 = 0.75 \\ x_3^{(1)} = 0 - 0.5 * 1 - 0.5 * 0.75 = -0.875 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{pmatrix}$$

Calculando Erro:

$$\begin{aligned} |x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| &= 1 \\ |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| &= 0.75 \\ |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| &= 0.875 \end{aligned}$$

$$d^{(1)} = 1$$

$$d_r^{(1)} = \frac{1}{1} = 1 > \varepsilon$$

Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

► Iteração $k = 0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0.2 * 0 - 0.2 * 0 = 1 \\ x_2^{(1)} = 1.5 - 0.75 * 1 - 0.25 * 0 = 0.75 \\ x_3^{(1)} = 0 - 0.5 * 1 - 0.5 * 0.75 = -0.875 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{pmatrix}$$

Próximas iterações: $k = 2$ e 3

Iteração $k = 1$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0.2 * 0.75 - 0.2 * (-0.875) = 1.025 \\ x_2^{(2)} = 1.5 - 0.75 * 1.025 - 0.25 * (-0.875) = 0.95 \\ x_3^{(2)} = 0 - 0.5 * 1.025 - 0.5 * 0.95 = -0.9875 \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{pmatrix} \quad d_r^{(2)} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > \varepsilon$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix} \quad d_r^{(3)} = 0.0409 < \varepsilon$$

► Resposta: $x^{(3)}$

Convergência do Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

- ▶ Como no método de Gauss-Jacobi, usa-se “critério das linhas” (i.e., matriz A deve ser diagonalmente dominante)
- ▶ Existem outros critérios
- ▶ Exemplo: **Critério de Sassenfeld:**

$$\beta_1 = \frac{\sum_{j=2}^n |a_{1j}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \text{ para } i = 2, 3, \dots, n$$

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \beta_j$$

Convergência do Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

- Critério de Sassenfeld:

$$\beta_1 = \frac{\sum_{j=2}^n |a_{1j}|}{|a_{11}|}$$
$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \text{ para } i = 2, 3, \dots, n$$
$$\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \beta_j$$

- Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 0.1x_3 + 0.1x_4 = 0.2 \\ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_3 - 0.1x_4 = -2.6 \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 + x_3 + 0.2x_4 = 1.0 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + x_4 = -2.5 \end{cases}$$

$$\beta_1 = (0.5 + 0.1 + 0.1)/1 = 0.7$$

$$\beta_2 = (0.7 * 0.2 + 0.2 + 0.1)/1 = 0.44$$

$$\beta_3 = (0.7 * 0.1 + 0.44 * 0.2 + 0.2)/1 = 0.358$$

$$\beta_4 = (0.7 * 0.1 + 0.44 * 0.3 + 0.358 * 0.2)/1 = 0.2736$$

- Como $\beta < 1$, método converge