

CI-202 - Métodos Numéricos

Sistemas de Equações Lineares (Parte 4)

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

30/10/2024

Sistemas de equações lineares

- ▶ Introdução
- ▶ Métodos Diretos
 - ▶ Regra de Cramer
 - ▶ Método da Eliminação de Gauss
 - ▶ Método da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial
 - ▶ Método de Gauss-Jordan
 - ▶ Fatoração LU
- ▶ Métodos Iterativos
 - ▶ Método de Gauss-Jacobi (algébrico)
 - ▶ Método de Gauss-Seidel (algébrico)
 - ▶ Método de Gauss-Jacobi (matricial)
 - ▶ Método de Gauss-Seidel (matricial)
 - ▶ Método da Relaxação

Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- ▶ Começamos reescrevendo a equação matricial em um problema de ponto fixo:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Tx + c,$$

- ▶ Acima, T é chamada de *matriz de iteração* e c é o *vetor de iteração*
 - ▶ Na sequência veremos como obter T e c satisfazendo a equação acima
- ▶ Feito isso, usamos a ideia de função iterativa:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Considere a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Vamos reescrever $A = L + D + U$, onde L, D, U são as matrizes:

$$D := \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad U := \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- Exemplo: Reescrevendo uma matriz A como $L + D + U$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_L + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_D + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_U.$$

Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

Dado $Ax = b$

- ▶ Primeiro escrevemos $A = L + D + U$
- ▶ A partir daí,

$$\begin{aligned}Ax = b &\Leftrightarrow (L + D + U)x = b \\&\Leftrightarrow Dx = -(L + U)x + b \\&\Leftrightarrow x = \underbrace{-D^{-1}(L + U)x}_{=:T_J} + \underbrace{D^{-1}b}_{=:c_J}.\end{aligned}$$

- ▶ Ou seja, $x = T_J x + c_J$
 - ▶ T_J é a matriz de iteração
 - ▶ c_J é o vetor iteração

$$x^{(k+1)} = T_J x^{(k)} + c_J$$

Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

- ▶ Exemplo: Resolva o sistema abaixo usando Gauss-Jacobi Matricial:

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 &= -10 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= 10\end{aligned}$$

- ▶ Primeiramente, colocamos o sistema na forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- **Primeiro passo:** Encontrar L , U , D :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_L + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_D + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_U.$$

- **Segundo passo:** Encontrar matriz e vetor de iteração (i.e., T_J e c_J):

► Lembrando: $x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)x}_{=:T_J} + \underbrace{D^{-1}b}_{=:c_J}.$

Temos:

$$T_J := -D^{-1}(L+U) = -\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{(L+U)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$c_J := D^{-1}b = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}}_b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{2} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- Primeiro passo: Encontrar L, U, D :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_L + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_D + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_U.$$

- Segundo passo: Encontrar matriz e vetor de iteração (i.e., T_j e c_j):

$$T_j := -D^{-1}(L+U) = -\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{(L+U)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$c_j := D^{-1}b = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}}_b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{2} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- Terceiro passo: Aplique as iterações até o erro desejado (igual ao algébrico)

Método de Gauss-Jacobi (Matricial)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$$T_J := -D^{-1}(L+U) = -\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{(L+U)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$c_J := D^{-1}b = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}}_b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{2} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- **Exercício:** Verifique que a aplicação da matriz de iteração produz o mesmo resultado que a aplicação das funções de iteração

Método de Gauss-Seidel (Matricial)

- Para encontrar a matriz e o vetor de iteração para Gauss-Seidel, usamos uma ideia parecida:

$$\begin{aligned}Ax = b &\Leftrightarrow (L + D + U)x = b \\&\Leftrightarrow (L + D)x = -Ux + b \\&\Leftrightarrow x = \underbrace{-(L + D)^{-1}Ux}_{=:T_G} + \underbrace{(L + D)^{-1}b}_{=:c_G}\end{aligned}$$

- Matriz e vetor de iteração:

$$T_G := -(L + D)^{-1}U$$

$$c_J = (L + D)^{-1}b$$

Método de Gauss-Seidel (Matricial)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- **Exercício:** Construa a matriz e o vetor de iteração do método de Gauss-Seidel para o sistema acima:

$$T_G := -(L + D)^{-1}U$$

$$c_G := (L + D)^{-1}b$$

$$T_G = -(L + D)^{-1}U = - \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}^{-1}}_{(L+D)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$c_G := (L + D)^{-1}b = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}^{-1}}_{(L+D)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}}_b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{28}{10} \end{bmatrix}.$$