CI-202 - Métodos Numéricos

Interpolação (Parte 1)

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

30/10/2024

Interpolação

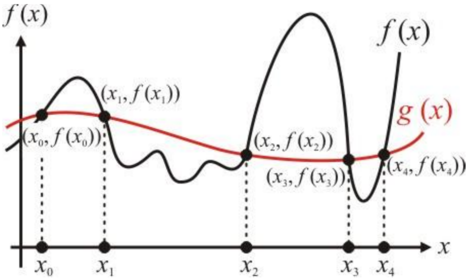
- Técnicas de Interpolação
  - Interpolação Linear e Quadrática
  - Interpolação de Lagrange
  - Interpolação de Newton com Diferenças Divididas
  - Interpolação de Gregory-Newton

Interpolação — introdução

Interpolação: determinar uma função $g(x)$ que descreve aproximadamente o comportamento de uma função $f(x)$.

- Situações comuns:
  - **Não** se conhece $f(x)$, mas se conhece os valores $(x, f(x))$.
  - Conhece-se $f(x)$, mas queremos uma função que seja mais simples.

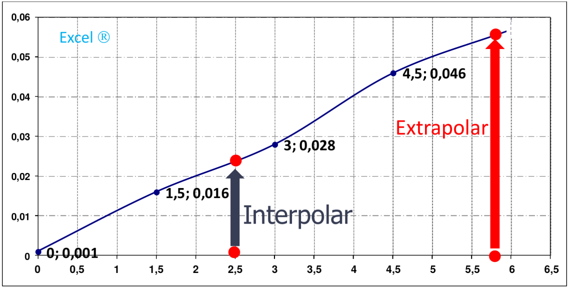
Interpolação — introdução



- Nesse exemplo só se conhece a função para 5 valores de x, chamados de **nós da interpolação**.
- Deseja-se conhecer o valor da função em pontos intermediários.

Interpolação e extrapolação

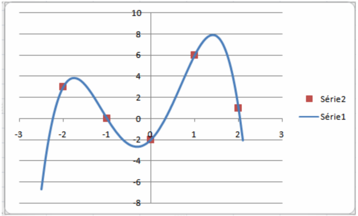
x	f(x)
0,0	0,001
1,5	0,016
3,0	0,028
4,5	0,046



- *Interpolação* é o método para estimar valores entre dois pontos conhecidos.
- *Extrapolação* é o método para estimar valores "fora" de pontos conhecidos

Interpolação — técnicas

- A interpolação é executada usando funções aproximadas, tais como:
    1. Funções trigonométricas
    2. Funções exponenciais
    3. Série de Fourier
    4. **Polinômios — Interpolação Polinomial**
- A *interpolação polinomial* consiste em determinar um *polinômio*, que assume valores conhecidos nos *nós de interpolação*.



Polinômios: escolha comum p/ interpolação (fáceis de avaliar, diferenciar, integrar).

Interpolação Polinomial

- Considere $(n+1)$ pontos distintos: $x_0, x_1, \ldots, x_n$,
  e os valores de $f(x)$ nesses pontos: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.
- Queremos obter uma função polinomial $g(x)$, tal que:

$$
\begin{aligned}
g(x_0) &= f(x_0) \\
g(x_1) &= f(x_1) \\
g(x_2) &= f(x_2) \\
&\vdots \\
g(x_n) &= f(x_n)
\end{aligned}
$$

Interpolação Linear

- Dados dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) o polinômio interpolador p_1 é
  - a equação da reta $p_1(x) = a_1 x + a_0$
  - que passe por (x_0, y_0) e (x_1, y_1)
- Preciso descobrir os coeficientes a_0 e a_1.
- Para tal, resolvo o sistema linear:

  $y_0 = a_1 x_0 + a_0$

  $y_1 = a_1 x_1 + a_0$
- ATENÇÃO: As incógitas aqui são os coeficiente a_i

Interpolação Quadrática

- Se conhecermos três pontos distintos de uma função podemos usar um polinômio de grau 2

$$p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

- A função $f(x)$ é aproximada por uma parábola que passa pelos três pontos conhecidos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2).

Interpolação Quadrática

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2).

- Queremos determinar a_0, a_1 e a_2 do polinômio $p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

  Para isso resolvemos o sistema:

  $y_0 = a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0$
  $y_1 = a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0$
  $y_2 = a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0$

- ATENÇÃO: As incógitas aqui são os coeficiente a_i

Interpolação Quadrática — Exemplo

- Seja a função $y = f(x)$, definida pelos pontos da tabela abaixo.

x	y
10	250
20	432
30	500

Determine o valor de $f(15)$ usando interpolação quadrática.

1. Preciso obter $p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
2. Depois calculo $p_2(15)$.

Interpolação Quadrática — Exemplo

x	y
10	250
20	432
30	500

- Resolvendo sistema p/ encontrar coeficientes do polinômio:

  $a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 250$

  $a_2 20^2 + a_1 20 + a_0 = 432$

  $a_2 30^2 + a_1 30 + a_0 = 500$

Interpolação Quadrática — Exemplo

x	y
10	250
20	432
30	500

- Resolvendo sistema p/ encontrar coeficientes do polinômio:

  $100a_2 + 10a_1 + a_0 = 250$

  $400a_2 + 20a_1 + a_0 = 432$

  $900a_2 + 30a_1 + a_0 = 500$

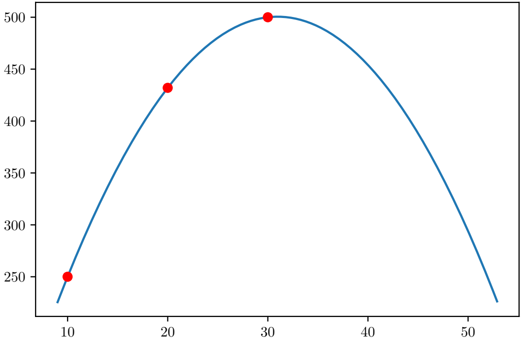
- Resolva usando, por exemplo, Eliminação Gaussiana

  $a_0 = -46 \qquad a_1 = 35,3 \qquad a_2 = -0,57$

$$p_2(x) = -0,57x^2 + 35,3x - 46$$

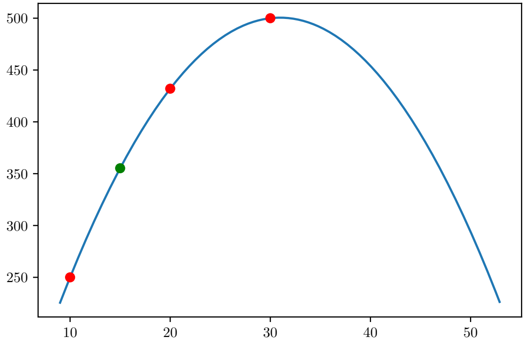
Interpolação Quadrática — Exemplo

$$p_2(x) = -0,57x^2 + 35,3x - 46$$



Interpolação Quadrática — Exemplo

- $p_2(x) = -0,57x^2 + 35,3x - 46$
- $p_2(15) = 355,25$



Interpolação Quadrática

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2).

- Queremos determinar a_0, a_1 e a_2. Para isso resolvemos o sistema:
  $y_0 = a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0$
  $y_1 = a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0$
  $y_2 = a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0$

- Podemos reescrever esse sistema como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Caso geral: Interpolação Polinomial

- Polinômio de grau n:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Dados $n+1$ pontos $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$, para obtermos um polinômio de grau n, como acima, resolvemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Interpolação Polinomial

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Dados $n+1$ pontos, para obtermos um polinômio de grau n resolvemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- Considere a matriz acima, conhecida por Matriz de Vandermonde.
- A existência da solução $a_0, ..., a_n$ depende de $\det(V)$.

$$\text{Para matrizes de Vandermonde, } \det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)\,.$$

Interpolação Polinomial

- Determinante da Matriz de Vandermonde:

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)\,.$$

- Para $n = 1$:

$$\det(V) = x_1 - x_0\,.$$

- Para $n = 2$:

$$\det(V) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)\,.$$

- Para $n = 3$:

$$\det(V) = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)\,.$$

Interpolação Polinomial

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)\,.$$

- Se o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema linear é diferente que zero, então existe uma única solução.
- $\det(V)$ é diferente de zero quando não existem valores de x repetidos.

Teorema: Dados $n + 1$ pontos não repetidos, resultantes de uma função $f(x)$, existe um único polinômio de grau menor ou igual a n que intercepta esses pontos.

Interpolação de Lagrange

Dados $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$

Polinômio na forma de Lagrange:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

onde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

Interpolação de Lagrange

Polinômio na forma de Lagrange:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

onde

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Polinômio na forma de Lagrange para grau $n = 1$

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

onde

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- $L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$
- $L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Interpolação de Lagrange

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

onde

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Polinômio na forma de Lagrange para grau $n = 2$

  $$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

  onde

  $$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$
- $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$
- $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

Interpolação de Lagrange

Dados $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$

Polinômio na forma de Lagrange:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

onde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

$$L_k(x_i) = \begin{Bmatrix} 0 & se\ k \neq i \\ 1 & se\ k = i \end{Bmatrix}$$

- Será que $P_n(x_0) = y_0$?

$$p_n(x_0) = y_0 L_0(x_0) + y_1 L_1(x_0) + \cdots + y_n L_n(x_0)$$

- Sim, pois $L_0(x_0) = 1$ e $L_i(x_0) = 0$ para $i = 1, ..., n$.
- Mesmo raciocínio para ver que $P_n(x_i) = y_i$

Interpolação de Lagrange

- Dado o polinômio na forma de Lagrange:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) \,.$$

- Como
  - $L_i(x_k) = 1$, quando $i = k$;
  - $L_i(x_k) = 0$, quando $i \neq k$;
- então

$$P_n(x_0) = y_0 \,,$$

$$P_n(x_1) = y_1 \,,$$

$$\vdots$$

$$P_n(x_n) = y_n \,.$$

Interpolação de Lagrange — Exemplo

- Seja a função $y = f(x)$, definida pelos pontos da tabela abaixo. Determine o valor de $f(15)$ usando interpolação de Lagrange.

x	y
10	250
20	432
30	500

Interpolação de Lagrange — Exemplo

- Polinômio na forma de Lagrange para grau $n = 2$

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

onde

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$p_2(x) = y_0 \tfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \tfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Interpolação de Lagrange — Exemplo

$$p_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Para calcular $f(15)$, basta substituir:

- $x = 15$
- $x_0 = 10$
- $x_1 = 20$
- $x_2 = 30$
- $y_0 = 250$
- $y_1 = 432$
- $y_2 = 500$