CI-202 - Métodos Numéricos

Interpolação (Parte 2)

Professor Murilo V. G. da Silva
Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

11/11/2024

Interpolação

- Técnicas de Interpolação
  - Interpolação Linear e Quadrática
  - Interpolação de Lagrange
  - Interpolação de Newton com Diferenças Divididas
  - Interpolação de Gregory-Newton

Interpolação por Polinômio de Newton

Dados $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$

Operador *diferenças divididas de ordem k*:

Ordem 0:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

Ordem 1:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i} = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

Ordem 2:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$$

Ordem 3:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]-f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]}{x_{i+3}-x_i}$$

Ordem *n*:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+n}]-f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+n-1}]}{x_{i+n}-x_0}$$

Interpolação por Polinômio de Newton

Ordem	**Operador**
0	$f[x_i] = f(x_i)$
1	$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i} = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$
2	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$
3	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]-f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]}{x_{i+3}-x_i}$
$\cdots$	
n	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+n}]-f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+n-1}]}{x_{i+n}-x_0}$

Interpolação por Polinômio de Newton

- Observe o seguinte:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

- i.e., o operador para $k = 2$ é comutativo:
- de fato, para $k = 1, ..., n$, não importa a ordem dos operados

- por exemplo, para $k = 3$:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0]$$

Interpolação por Polinômio de Newton

- Dados $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	... Ordem n
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$\ddots$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$\ldots f[x_0, x_1, x_2, \ldots$
		$f[x_3, x_4]$		$\vdots$	$\iddots$
x_4	$f[x_4]$		$\vdots$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	
		$\vdots$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
$\vdots$	$\vdots$				
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

- onde $f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, ..., n$:

Interpolação por Polinômio de Newton

- Teorema: Considere os pontos $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$
  O polinômio abaixo é um polinômio interpolador dos $n + 1$ pontos acima:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots +$$
$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

Interpolação por Polinômio de Newton

- Exemplo: encontre o polinômio interpolador de Newton para os pontos:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

$$f[x_0] = 4 \quad f[x_1] = 1 \quad f[x_2] = -1$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1-4}{0-(-1)} = -3$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{2-0} = -1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1-(-3)}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$$

x	**Ordem 0**	**Ordem 1**	**Ordem 2**
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 4$		
		$f[x_0, x_1] = -3$	
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = 2/3$
		$f[x_1, x_2] = -1$	
$x_2 = 2$	$f[x_2] = -1$		

Interpolação por Polinômio de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 4$		
		$f[x_0, x_1] = -3$	
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0, x_1, x_2] = 2/3$
		$f[x_1, x_2] = -1$	
$x_2 = 2$	$f[x_2] = -1$		

- Relembrando a fórmula do polinômio:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

- Portanto,

$$p_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$p_2(x) = 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)\frac{2}{3} = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

Interpolação por Polinômio de Newton

- Exemplo: encontre o polinômio interpolador de Newton para os pontos:

x	-1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	-1	-2

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1	1				
		0			
0	1		-1/2		
		-1		1/6	
1	0		0		-1/24
		-1		0	
2	-1		0		
		-1			
3	-2				

Interpolação por Polinômio de Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1	1				
		0			
0	1		-1/2		
		-1		1/6	
1	0		0		-1/24
		-1		0	
2	-1		0		
		-1			
3	-2				

- Substituinddo na fórmula:

$$p_4(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$$p_4(x) = 1 + (x+1)0 + (x+1)(x)(-\tfrac{1}{2}) + (x+1)(x)(x-1)\tfrac{1}{6} + (x+1)(x)(x-1)(x-2)(-\tfrac{1}{24})$$

Interpolação por Polinômio de Gregory-Newton

- Caso bastante comum: valores de x igualmente espaçados

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

Ou seja:

$$x_i = x_{i-1} + h \Rightarrow x_i = x_0 + i \times h$$

Dados $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ respeitando as condições acima:

Operador *diferenças finita de ordem k*, denotado Δ^k aplicado aos pontos acima:

Ordem	**Operador**
0	$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$
1	$\Delta^1 f(x_i) = \Delta^0 f(x_{i+1}) - \Delta^0 f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$
2	$\Delta^2 f(x_i) = \Delta^1 f(x_{i+1}) - \Delta^1 f(x_i)$
...	
n	$\Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{n-1} f(x_i)$

Interpolação por Polinômio de Gregory-Newton

- Exemplo:

$x_0 = 3.5$	$f(x_0) = 9,82$
$x_1 = 4$	$f(x_1) = 10.91$
$x_2 = 4.5$	$f(x_2) = 12.05$
$x_3 = 5$	$f(x_3) = 13.14$
$x_4 = 5.5$	$f(x_4) = 16.19$

Exemplo de montagem da tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = 3.5$	$f(x_0) = 9,82$				
		$10.91 - 9.82 = 1.09$			
$x_1 = 4$	$f(x_1) = 10.91$		$1.14 - 1.09 = 0.05$		
		$12.05 - 10.91 = 1.14$		$-0.05 - 0.05 = -0.1$	
$x_2 = 4.5$	$f(x_2) = 12.05$		$1.09 - 1.14 = -0.05$		2.11
		1.09		2.01	
$x_3 = 5$	$f(x_3) = 13.14$		1.96		
		3.05			
$x_4 = 5.5$	$f(x_4) = 16.19$				

Interpolação por Polinômio de Gregory-Newton

- Relação entre os operadores diferença finita e diferença dividida:

Ord.	Operador
0	$f[x_i] = \Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$
1	$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{\Delta^1 f(x_i)}{h}$
2	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} = \dfrac{\dfrac{\Delta^1 f(x_{i+1})}{h} - \dfrac{\Delta^1 f(x_i)}{h}}{2h} = \dfrac{\Delta^1 f(x_{i+1}) - \Delta^1 f(x_i)}{2h^2} = \dfrac{\Delta^2 f(x_i)}{2h^2}$
3	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \dfrac{\dfrac{\Delta^2 f(x_{i+1})}{2h^2} - \dfrac{\Delta^2 f(x_i)}{2h^2}}{3h} = \dfrac{\Delta^2 f(x_{i+1}) - \Delta^2 f(x_i)}{(2 \times 3)h^3} = \dfrac{\Delta^3 f(x_i)}{(2 \times 3)h^3}$
...	
n	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] = \dfrac{\Delta^n f(x_i)}{n! h^n}$

- Ou seja,

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] = \frac{\Delta^n f(x_i)}{n! h^n}$$

Interpolação por Polinômio de Gregory-Newton

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] = \frac{\Delta^n f(x_i)}{n!h^n}$$

- A partir da fórmula do polinômio de Newton,

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

- Obtemos a fórmula do polinômio de Gregory-Newton,

$$p_n(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$$

- Ou, de maneira compacta,

$$p_n(x) = \Delta^0 f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \frac{\Delta^i f(x_0)}{i!h^i} \right\}$$

Interpolação por Polinômio de Gregory-Newton

- Exemplo: encontre o polinômio interpolador de Gregory-Newton para os pontos:

x	-1	0	1	2	3
f(x)	2	1	2	5	10

x	**Ordem 0**	**Ordem 1**	**Ordem 2**	**Ordem 3**	**Ordem 4**
$x_0 = -1$	$f(x_0) = 2$				
		-1			
$x_1 = 0$	$f(x_1) = 1$		2		
		1		0	
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 2$		2		0
		3		0	
$x_3 = 2$	$f(x_3) = 5$		2		
		5			
$x_4 = 3$	$f(x_4) = 10$				

Interpolação por Polinômio de Gregory-Newton

x	**Ordem 0**	**Ordem 1**	**Ordem 2**	**Ordem 3**	**Ordem 4**
$x_0 = -1$	$f(x_0) = 2$				
		-1			
$x_1 = 0$	$f(x_1) = 1$		2		
		1		0	
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 2$		2		0
		3		0	
$x_3 = 2$	$f(x_3) = 5$		2		
		5			
$x_4 = 3$	$f(x_4) = 10$				

- Fórmula do polinômio interpolador de Gregory-Newton:

$$p_n(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$$

- Portanto,

$$p_4(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!h^4}$$

Interpolação por Polinômio de Gregory-Newton

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
$x_0 = -1$	$f(x_0) = 2$				
		-1			
$x_1 = 0$	$f(x_1) = 1$		2		
		1		0	
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 2$		2		0
		3		0	
$x_3 = 2$	$f(x_3) = 5$		2		
		5			
$x_4 = 3$	$f(x_4) = 10$				

- Como $\Delta^4 f(x_0) = \Delta^3 f(x_0) = 0$ e $h = 1$ a solução é o polinômio

$$p_4(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!h^4}$$

- Pode ser simplificado para o polinômio de grau 2:

$$p_2(x) = 2 + (x - (-1))\frac{-1}{1!1^1} + (x - (-1))(x - 0)\frac{2}{2!1^2}$$
$$p_2(x) = 2 + (x + 1)(-1) + (x + 1)(x)$$