Exercícios — Métodos Numéricos

Henrique Hepp

3 de Abril de 2024

1 Encontrando raízes de funções

1.1 Método da Bisseção

1. Usando o método da bisseção encontre a raiz de $f(x) = x^2 - 3$, contida no intervalo $[1; 2]$, com $erro \leq 0,1$.

$x = 1,7 \pm 0,1$

i	**a**	$f(a)$	**b**	$f(b)$	**x**	$f(x)$	$\|b-a\|$
0	**1**	-2	**2**	1			1
1	**1**	-2	**2**	1	**1.5**	-0.75	1
2	**1.5**	-0.75	**2**	1	**1.75**	0.0625	0.5
3	**1.5**	-0.75	**1.75**	0.0625	**1.625**	-0.359375	0.25
4	**1.625**	-0.359375	**1.75**	0.0625	**1.6875**	-0.15234375	0.125
5	**1.6875**	-0.15234375	**1.75**	0.0625	**1.71875**	-0.04589844	0.0625

2. Usando o método da bisseção encontre a raiz da função $f(x) = x^2 + \ln(x)$, contida no intervalo $[0,5; 1]$, com $erro \leq 0,1$.

Usando arredondamento de 8 casas decimais durante as contas; $x = 0,7 \pm 0,1$.

i	**a**	$f(a)$	**b**	$f(b)$	**x**	$f(x)$	$\|b-a\|$
0	**0.5**	-0.44314718	**1**	1.0			0.5
1	**0.5**	-0.44314718	**1**	1.0	**0.75**	0.27481793	0.5
2	**0.5**	-0.44314718	**0.75**	0.27481793	**0.625**	-0.07937863	0.25
3	**0.625**	-0.07937863	**0.75**	0.27481793	**0.6875**	0.0979628	0.125
4	**0.625**	-0.07937863	**0.6875**	0.0979628	**0.65625**	0.0094506	0.0625

3. Encontre um intervalo que contenha a primeira raiz positiva da função $f(x) = e^{-x} - \text{sen}(x)$. Uma maneira de fazê-lo, é calcular $f(x))$ para os primeiros números inteiros positivos (incluindo o zero) e verificar se ocorre uma mudança de sinal. Escolhido o intervalo $[a, b]$, é necessário que $f(a)f(b) < 0$.

x	$f(x)$
0	1.0
1	-0.4736
2	-0.774
3	-0.0913
4	0.7751
5	0.9657

Intervalo $[0, 1]$.

4. Usando o intervalo encontrado na questão anterior, e usando o método da bisseção, encontre a primeira raiz positiva da função $f(x) = e^{-x} - \text{sen}(x)$, com $erro \leq 0,1$.

Usando durante as contas um arredondamento de 8 casas decimais; $x = 0,6 \pm 0,1$.

i	**a**	$f(a)$	**b**	$f(b)$	**x**	$f(x)$	$\|b-a\|$
0	**0**	1.0	**1**	-0.47359154			1
1	**0**	1.0	**1**	-0.47359154	**0.5**	0.12710512	1
2	**0.5**	0.12710512	**1**	-0.47359154	**0.75**	-0.20927221	0.5
3	**0.5**	0.12710512	**0.75**	-0.20927221	**0.625**	-0.04983584	0.25
4	**0.5**	0.12710512	**0.625**	-0.04983584	**0.5625**	0.03648015	0.125
5	**0.5625**	0.03648015	**0.625**	-0.04983584	**0.59375**	-0.00722068	0.0625

1.2 Método da Falsa Posição

5. Identifique um intervalo em que tenha uma raiz para a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Para tal, calcule $f(x)$ para os valores $-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$ e verifique quando ocorre uma mudança de sinal. Escolhido o intervalo $[a, b]$, é necessário que $f(a)f(b) < 0$.

x	$f(x)$
-4	-25
-3	3
-2	13
-1	11
0	3
1	-5
2	-7
3	3
4	31

As raízes estão nos intervalos: $[-4; -3]$, $[0; 1]$, $[2; 3]$

6. Usando o Método da Falsa Posição e o intervalo encontrado na questão anterior calcule uma raiz aproximada para a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$, com erro $\epsilon \leq 0,001$.

Usando durante as contas um arredondamento de 8 casas decimais; sendo o intervalo inicial $[-4; -3]$, temos $x = -3,154 \pm 0,001$.

i	**a**	$f(a)$	**b**	$f(b)$	$\mathbf{x_n}$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	$\mathbf{-4}$	-25	$\mathbf{-3}$	3			
1	$\mathbf{-4}$	-25	$\mathbf{-3}$	3	$\mathbf{-3.10714286}$	0.96688223	
2	$\mathbf{-4}$	-25	$\mathbf{-3.10714286}$	0.96688223	$\mathbf{-3.14038858}$	0.29285807	0.03324572
3	$\mathbf{-4}$	-25	$\mathbf{-3.14038858}$	0.29285807	$\mathbf{-3.15034175}$	0.0870266	0.00995317
4	$\mathbf{-4}$	-25	$\mathbf{-3.15034175}$	0.0870266	$\mathbf{-3.1532892}$	0.02571427	0.00294745
5	$\mathbf{-4}$	-25	$\mathbf{-3.1532892}$	0.02571427	$\mathbf{-3.15415921}$	0.00758506	0.00087001

Usando durante as contas um arredondamento de 8 casas decimais; sendo o intervalo inicial $[0; 1]$, temos $x = 0,338 \pm 0,001$.

i	**a**	$f(a)$	**b**	$f(b)$	$\mathbf{x_n}$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	$\mathbf{0}$	3	$\mathbf{1}$	-5			
1	$\mathbf{0}$	3	$\mathbf{1}$	-5	$\mathbf{0.375}$	-0.32226562	
2	$\mathbf{0}$	3	$\mathbf{0.375}$	-0.32226562	$\mathbf{0.33862434}$	-0.00879021	0.03637566
3	$\mathbf{0}$	3	$\mathbf{0.33862434}$	-0.00879021	$\mathbf{0.33763505}$	-0.00022592	0.00098929

Usando durante as contas um arredondamento de 8 casas decimais; sendo o intervalo inicial $[2; 3]$, temos $x = 2,817 \pm 0,001$.

i	**a**	$f(a)$	**b**	$f(b)$	$\mathbf{x_n}$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	$\mathbf{2}$	-7	$\mathbf{3}$	3			
1	$\mathbf{2}$	-7	$\mathbf{3}$	3	$\mathbf{2.7}$	-1.617	
2	$\mathbf{2.7}$	-1.617	$\mathbf{3}$	3	$\mathbf{2.80506823}$	-0.1741934	0.10506823
3	$\mathbf{2.80506823}$	-0.1741934	$\mathbf{3}$	3	$\mathbf{2.8157657}$	-0.01699024	0.01069747
4	$\mathbf{2.8157657}$	-0.01699024	$\mathbf{3}$	3	$\mathbf{2.81680322}$	-0.00164078	0.00103752
5	$\mathbf{2.81680322}$	-0.00164078	$\mathbf{3}$	3	$\mathbf{2.81690336}$	-0.00015831	0.00010014

7. Usando o Método da Falsa Posição calcule a raiz para a função $f(x) = x^2 - 3$, com erro $\epsilon \leq 0,01$. Sabe-se que a raiz está contida no intervalo $[1; 2]$.

Usando durante as contas um arredondamento de 8 casas decimais; $x = 1,73 \pm 0,01$.

i	**a**	$f(a)$	**b**	$f(b)$	$\mathbf{x_n}$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	**1**	-2	**2**	1			
1	**1**	-2	**2**	1	**1.66666667**	-0.22222221	
2	**1.66666667**	-0.22222221	**2**	1	**1.72727273**	-0.01652892	0.06060606
3	**1.72727273**	-0.01652892	**2**	1	**1.73170732**	-0.00118976	0.00443459

1.3 Método da iteração linear

8. Usando o método da iteração linear calcule a raiz contida no intervalo $[0.5; 1]$ da função $f(x) = x^2 + 3x - cos(x) - 2,45$, com erro $\leq 0,01$.

Usando $g(x) = \frac{-1}{3}(x^2 - cos(x) - 2,45)$ e $x_0 = 0,7$, obtemos $x = 0,82 \pm 0,01$.

i	**x**	$f(x)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	**0.7**	-0.6248421872844894	
1	**0.9082807290948295**	0.4847138575832348	0.20828072909482953
2	**0.7467094432337511**	-0.38622455227075614	0.16157128586107838
3	**0.8754509606573363**	0.3021166054134343	0.1287415174235852
4	**0.7747454255195249**	-0.24013238983820617	0.10070553513781144
5	**0.8547895554655935**	0.18865655999803943	0.08004412994606869
6	**0.791904035466247**	-0.14966739501596393	0.06288551999934655
7	**0.8417931671382349**	0.11786875376672512	0.04988913167198794
8	**0.8025035825493265**	-0.09338581992824757	0.03928958458890841
9	**0.8336321891920756**	0.07364818656432348	0.03112860664274908
10	**0.8090827936706344**	-0.058299115587156614	0.024549395521441197
11	**0.8285158321996866**	0.04601575044809403	0.019433038529052205
12	**0.8131772487169885**	-0.03640473213697071	0.01533858348269812
13	**0.825312159429312**	0.028749002239240706	0.012134910712323532
14	**0.8157291586828985**	-0.0227360473619318	0.009583000746413495

9. Usando o método da iteração linear calcule a raiz contida no intervalo $[0.5; 1]$ da função $f(x) = x^3 - 5x + 3$, com erro $\leq 0,001$.

Usando $\frac{1}{5}(x^3+3)$ e $x_0 = 0,7$, obtemos $x = 0,657 \pm 0,001$

i	**x**	$f(x)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	**0.7**	−0.15700000000000003	
1	**0.6686000000000001**	−0.04411844314400026	0.03139999999999987
2	**0.6597763113712001**	−0.011677774094835058	0.008823688628800008
3	**0.6574407565522331**	−0.003039250401543736	0.0023355548189669673
4	**0.6568329064719244**	−0.0007874615963809894	0.000607850080308725

1.4 Método de Newton-Raphson

10. Usando o método de Newton-Raphson calcule uma raiz negativa de $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$ com erro $\leq 0,0001$. A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$.

Usando $x_0 = -2$; temos $x = -0.6458 \pm 0,0001$.

i	**x**	$f(x)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	**−2**	−27	
1	**−1.1818181818181817**	−6.81592787377911	0.8181818181818183
2	**−0.7810760667903525**	−1.3079939252377244	0.4007421150278292
3	**−0.6581558611013457**	−0.10909435530680645	0.12292020568900675
4	**−0.6458719353859087**	−0.0010505557526280027	0.012283925715437016
5	**−0.6457513226535857**	$-1.0092273461382e-07$	0.00012061273232299996
6	**−0.6457513110645907**	$-1.33227e-15$	$1.158899498588e-08$

11. Usando o método de Newton-Raphson calcule a raiz de $f(x) = x^3 - x + 1$, contida no intervalo $[-2;-1]$, com erro $\leq 10^{-3}$. A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 3x^2 - 1$.

Usando $x_0 = -1,5$; temos $x = -1,325 \pm 0,001$.

i	**x**	$f(x)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	$-\mathbf{1.5}$	-0.875	
1	$-\mathbf{1.3478260869565217}$	-0.10068217309114824	0.15217391304347827
2	$-\mathbf{1.325200398950907}$	-0.0020583619166634204	0.02262568800561482
3	$-\mathbf{1.3247181739990537}$	$-9.2437775967014e-07$	0.00048222495185323844

12. Usando o método de Newton-Raphson calcule a raiz de $f(x) = \text{sen}(x) - \text{tg}(x)$, contida no intervalo $[3; 4]$, com erro $\leq 0,001$. A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = cos(x) - tg^2(x) - 1$.

Usando $x_0 = 3,5$; temos $x = 3,142 \pm 0,001$.

i	**x**	$f(x)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	$\mathbf{3.5}$	-0.7253688678482145	
1	$\mathbf{3.150722763017069}$	-0.01826034570951668	0.3492772369829309
2	$\mathbf{3.1415927804511026}$	$-2.5372261866984e-07$	0.009129982565966532
3	$\mathbf{3.141592653589793}$	$2.4493e-16$	$1.2686130945738e-07$

1.5 Método das secantes

13. Usando o método das secantes calcule a raiz da função $f(x) = 3x - \cos(x)$, sendo $x_0 = 0$ e $x_1 = 0,5$ e o erro $\leq 0,001$. Efetue os cálculos com 5 casas decimais com arredondamento.

$x = 0,317 \pm 0,001$

i	$\mathbf{x_{n-1}}$	$f(x_{n-1})$	$\mathbf{x_n}$	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	$\mathbf{0}$	-1.0	$\mathbf{0.5}$	0.62242	0.5
2	$\mathbf{0.5}$	0.62242	$\mathbf{0.30818}$	-0.02835	0.19182
3	$\mathbf{0.30818}$	-0.02835	$\mathbf{0.31654}$	-0.0007	0.00836
4	$\mathbf{0.31654}$	-0.0007	$\mathbf{0.31675}$	-0.0	0.00021

14. Usando o método das secantes calcule a raiz da função $f(x) = x^3 - 4$, sendo $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ e o erro ≤ 0.05.

$x = 1,59 \pm 0,05$

i	$\mathbf{x_{n-1}}$	$f(x_{n-1})$	$\mathbf{x_n}$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	**1**	-3	**2**	4	1
2	**2**	4	**1.42857**	-1.08456	0.57143
3	**1.42857**	-1.08456	**1.55046**	-0.27281	0.12189
4	**1.55046**	-0.27281	**1.59142**	0.03046	0.04096

1.6 Revisão

15. Escreva os algoritmos para os seguintes métodos:

    (a) Método da bisseção.

    - Entrada: a e b tal que $f(a)f(b) < 0$ e o erro ϵ.
    - Iteração 1
      - $x_1 = (a+b)/2$
      - $f(x_1) = 0$? Se sim, termina. Se não, continua.
      - $|a-b| \leq$ erro? Se sim, termina. Se não, continua.
    - Iteração n
      - $f(a)f(x_{n-1}) < 0$?
        * Se sim, $b \leftarrow x_{n-1}$
        * Se não, $a \leftarrow x_{n-1}$
      - $x_n = (a+b)/2$
      - $f(x_n) = 0$? Se sim, termina. Se não, continua.
      - $|a-b| \leq$ erro? Se sim, termina. Se não, continua.

(b) Método da falsa posição.

- Entrada: a e b tal que $f(a)f(b) < 0$ e o erro ϵ.
- Iteração 1
  - $x_1 = a - \frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)}$
  - $f(x_1) = 0$? Se sim, termina. Se não, continua.
- Iteração n
  - $f(a)f(x_{n-1}) < 0$?
    - Se sim, $b \leftarrow x_{n-1}$
    - Se não, $a \leftarrow x_{n-1}$
  - $x_n = a - \frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)}$
  - $f(x_n) = 0$? Se sim, termina. Se não, continua.
  - $|x_n - x_{n-1}| \leq$ erro? Se sim, termina. Se não, continua.

(c) Método da iteração linear.

- Entrada: $g(x)$ tal que o ponto fixo é uma raiz; um x_0 inicial e o erro ϵ.
- Iteração 1.
  - $x_1 = g(x_0)$
  - $|x_1 - x_0| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.
- Iteração n.
  - $x_n = g(x_{n-1})$
  - $|x_n - x_{n-1}| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.

(d) Método de Newton-Raphson.

- Entrada: $f(x)$; $f'(x)$; um valor inicial x_0 próximo à raiz a ser encontrada; e o erro ϵ.
- Iteração 1.
  - $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  - $|x_1 - x_0| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.
- Iteração n.
  - $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$
  - $|x_n - x_{n-1}| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.

(e) Método das secantes.

- Entrada: $f(x)$; dois valores iniciais x_0 e x_1 próximos à raiz a ser encontrada; e o erro ϵ.
- Iteração 1.
  - $x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$
  - $|x_2 - x_1| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.
- Iteração n.
  - $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$
  - $|x_n - x_{n-1}| \leq$ erro? Se sim, pare. Se não, continue.

16. Encontre a menor raiz da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$ usando os métodos abaixo. A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 2x - 5$. Use erro ≤ 0.05.

(a) Método da bisseção.

$x = 0,99 \pm 0,05$.

i	**a**	$f(a)$	**b**	$f(b)$	**x**	$f(x)$	$\|b-a\|$
0	**−1**	10	**2**	−2			3
1	**−1**	10	**2**	−2	**0.5**	1.75	3
2	**0.5**	1.75	**2**	−2	**1.25**	−0.6875	1.5
3	**0.5**	1.75	**1.25**	−0.6875	**0.875**	0.390625	0.75
4	**0.875**	0.390625	**1.25**	−0.6875	**1.0625**	−0.18359375	0.375
5	**0.875**	0.390625	**1.0625**	−0.18359375	**0.96875**	0.09472656	0.1875
6	**0.96875**	0.09472656	**1.0625**	−0.18359375	**1.015625**	−0.04663086	0.09375
7	**0.96875**	0.09472656	**1.015625**	−0.04663086	**0.9921875**	0.02349854	0.046875

(b) Método da falsa posição.

$1,02 \pm 0,05$

i	**a**	$f(a)$	**b**	$f(b)$	$\mathbf{x_n}$	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	$\mathbf{-1}$	10	**2**	-2			
1	$\mathbf{-1}$	10	**2**	-2	**1.5**	-1.25	
2	$\mathbf{-1}$	10	**1.5**	-1.25	**1.22222222**	-0.61728394	0.27777778
3	$\mathbf{-1}$	10	**1.22222222**	-0.61728394	**1.09302325**	-0.27041642	0.12919897
4	$\mathbf{-1}$	10	**1.09302325**	-0.27041642	**1.03791469**	-0.11230655	0.05510856
5	$\mathbf{-1}$	10	**1.03791469**	-0.11230655	**1.01528176**	-0.04561175	0.02263293

(c) Método da iteração linear.

$x = 0,99 \pm 0,05$

i	**x**	$f(x)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	**0**	4	
1	**0.8**	0.64	0.8
2	**0.95238095**	0.14512472	0.15238095
3	**0.98823529**	0.03543254	0.03585434

(d) Método de Newton-Raphson.

$x = 1,00 \pm 0,05$

i	**x**	$f(x)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	**0**	4	
1	**0.8**	0.64	0.8
2	**0.98823529**	0.03543254	0.18823529
3	**0.99995422**	0.00013734	0.01171893

(e) Método das secantes.

$x = 0,99 \pm 0,05$

i	$\mathbf{x_{n-1}}$	$f(x_{n-1})$	$\mathbf{x_n}$	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	$\mathbf{-1}$	10	$\mathbf{0}$	4	1
2	$\mathbf{0}$	4	$\mathbf{0.66666667}$	1.1111111	0.66666667
3	$\mathbf{0.66666667}$	1.1111111	$\mathbf{0.92307692}$	0.2366864	0.25641025
4	$\mathbf{0.92307692}$	0.2366864	$\mathbf{0.9924812}$	0.02261293	0.06940428
5	$\mathbf{0.9924812}$	0.02261293	$\mathbf{0.99981249}$	0.00056257	0.00733129