

Exercícios — Métodos Numéricos

Henrique Hepp

25 de Julho de 2024

1 Interpolação

1. Dada a função $f(x) = 10x^4 + 2x + 1$ use a interpolação linear para os valores de $f(0.1)$ e $f(0.2)$ e determine $P_1(0.15)$. Calcule também o erro absoluto cometido.

Coordenadas: $x_0 = 0.1; y_0 = 1.201; x_1 = 0.2; y_1 = 1.416$

Equação da reta: $y = 0.986 + 2.15x$

$P_1(0.15) = 1.3085$

$f(0.15) = 1.3050625$

Erro absoluto = 0.0034

2. Dada a função $f(x) = 10x^4 + 2x + 1$ use a interpolação quadrática para os valores de $f(0.0)$, $f(0.1)$ e $f(0.2)$ e determine $P_2(0.15)$. Calcule também o erro absoluto cometido.

Coordenadas: $x_0 = 0; y_0 = 1; x_1 = 0.1; y_1 = 1.201; x_2 = 0.2; y_2 = 1.416$

Equação da parábola: $y = 0.7x^2 + 1.94x + 1.$

$P_2(0.15) = 1.30675$

$f(0.15) = 1.3050625$

Erro absoluto = 0.0017

3. Calcule o calor específico aproximado da água a 31°C usando os valores da tabela abaixo. Você poderá usar qualquer método.

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Temperatura ($^\circ\text{C}$)	20	25	30	35	40	45	50
Calor Específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

- (a) Usando interpolação linear.

Coordenadas: $x_0 = 30; y_0 = 0.99826; x_1 = 35; y_1 = 0.99818$

$P_1(31) = 0.99824$ (5 casas decimais com arredondamento)

(b) Usando interpolação quadrática (use os três pontos tabelados mais próximos).

Coordenadas: $x_0 = 25$; $y_0 = 0.99852$; $x_0 = 30$; $y_0 = 0.99826$; $x_1 = 35$; $y_1 = 0.99818$

$P_1(31) = 0.99823$ (5 casas decimais com arredondamento)

4. Determine o polinômio interpolador na forma de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo e o resultado em $P(0.5)$:

i	x_i	y_i
0	0	0
1	1	1
2	2	4

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{-0.5}{-1} \times \frac{-1.5}{-2} = 0.375$$

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{0.5}{1} \times \frac{-1.5}{-1} = 0.75$$

$$L_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{0.5}{2} \times \frac{-0.5}{1} = -0.125$$

$$p_2 = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 = 0.25$$

5. Determine o polinômio interpolador de Lagrange para a função conhecida pelos pontos da tabela abaixo e o resultado em $P(1)$:

i	x_i	y_i
0	-1	4
1	0	1
2	2	1
3	3	16

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} = \frac{1}{-1} \times \frac{-1}{-3} \times \frac{-2}{-4} = -0.16666666666666666$$

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{2}{1} \times \frac{-1}{-2} \times \frac{-2}{-3} = 0.6666666666666666$$

$$L_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{-2}{-1} = 0.6666666666666666$$

$$L_3 = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{-1}{1} = -0.16666666666666666$$

$$p_3 = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 = -2.0$$

6. Resolva os problemas abaixo usando Interpolação de Newton com Diferenças Divididas.

- (a) Obtenha $f(40)$ usando um polinômio interpolador de Newton de grau 3 (polinômio cúbico, são necessários 4 pontos). Considere a seguinte tabela:

x_i	30	35	45	50	55
$f(x_i)$	0.5	0.574	0.707	0.766	0.819

Arredondando para 4 casas decimais.

	x	b_0	b_1	b_2	b_3
x_0	30	0.5	0.0148	-0.0001	-0.0
x_1	35	0.574	0.0133	-0.0001	
x_2	45	0.707	0.0118		
x_3	50	0.766			

$$p(40) = 0.643$$

- (b) Obtenha $f(0.47)$ usando um polinômio interpolador de Newton do segundo grau (polinômio quadrático, são necessários 3 pontos). Considere a seguinte tabela:

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
$f(x_i)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

Pego os 3 pontos mais próximos a 0.47. Nesse caso temos duas opções.

x_i	0.34	0.4	0.52
$f(x_i)$	0.22	0.27	0.29

e

x_i	0.4	0.52	0.6
$f(x_i)$	0.27	0.29	0.32

Para o primeiro caso:

	x	b_0	b_1	b_2
x_0	0.34	0.22	0.8333	-3.7037
x_1	0.4	0.27	0.1667	
x_2	0.52	0.29		

$$p(x) = 0.295$$

Segundo caso:

	x	b_0	b_1	b_2
x_0	0.4	0.27	0.1667	1.0417
x_1	0.52	0.29	0.375	
x_2	0.6	0.32		

$$p(x) = 0.278$$

- (c) Obtenha $f(0.5)$ usando um polinômio interpolador de Newton de grau 4 (são necessários 5 pontos). Considere a seguinte tabela:

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	1	1	0	-1	-2

	x	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
x_0	-1	1	0.0	-0.5	0.1667	-0.0417
x_1	0	1	-1.0	0.0	0.0	
x_2	1	0	-1.0	0.0		
x_3	2	-1	-1.0			
x_4	3	-2				

$$p(x) = 0.539$$

7. Quais problemas da Questão 6 podem ser resolvidos usando Interpolação de Gregory-Newton? Resolva eles usando esse método.

Letra c.

	x	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
x_0	-1	1	0	-1	1	-1
x_1	0	1	-1	0	0	
x_2	1	0	-1	0		
x_3	2	-1	-1			
x_4	3	-2				

$$p(x) = 0.539$$