

Tópicos em Complexidade Computacional

Máquinas de Turing e universalidade

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática
Universidade Federal do Paraná

09/06/2022

Modelo de Computação: Máquina de Turing

Relembrando nosso modelo:

Def.: Máquina de Turing

$M = (\Gamma, Q, \delta)$ tal que

- $\Gamma = \{\triangleright, \square, 0, 1\}$
- $Q = \{q_{\text{START}}, q_{\text{HALT}}\} \cup \{q_1, \dots, q_n\}$
- $\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$

A respeito de MTs:

- Tipicamente com 3 fitas (entrada, trabalho, saída)
- Quando conveniente, poderemos usar mais fitas, mais símbolos, pseudo-código, etc
- Seja α uma string (binária):
 - M_α é a MT descrita por α (i.e., $\sqcup M_\alpha = \alpha \sqcup$)
- Vamos assumir que
 - Toda string represente alguma MT
 - Uma MT pode ser representada por infinitas strings

Modelo de Computação: Máquina de Turing

Interpretação física do modelo:

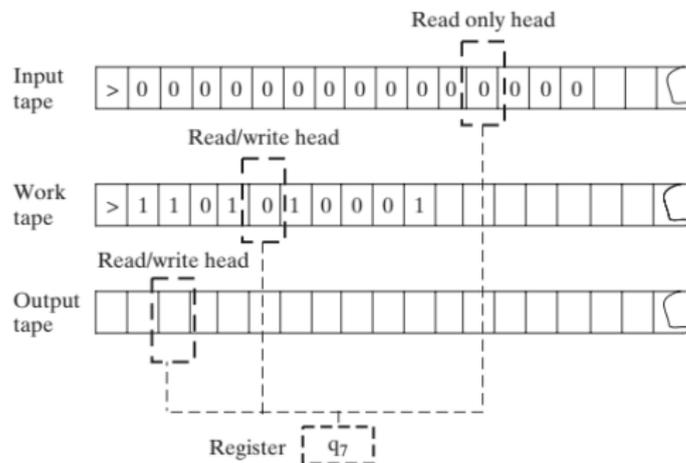


Figura: Barak & Arora, pág. 11

Exercício 1: Projete uma MT que decida se uma string é um palíndromo

Definição: Função computável e complexidade de tempo

Sejam $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ e $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funções e seja M uma Máquina de Turing.

- M computa f se, sempre que M é inicializada com x na fita 1, então M para com $f(x)$ na fita de saída.
- M computa f em tempo $T(n)$ se a computação requer $T(|x|)$ passos.

Uma MT M decide uma linguagem $L \in \{0, 1\}^*$, se M computa a função f_L .
(lembrando que $f_L(x) = 1 \leftrightarrow x \in L$).

Definição: Funções tempo construtíveis

Uma função $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é tempo construtível se

- $T(n) \geq n$, e
- Existe uma MT M que computa a função $\lfloor x \rfloor \rightarrow \lfloor T(|x|) \rfloor$ em tempo $T(n)$

Exemplos: n , $n \log n$, n^2 , 2^n , etc.

Alfabeto binário é suficiente

Considere a função $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ e a função tempo construtível $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Teorema 2.1

Se f é computável em tempo $T(n)$ por uma MT M com alfabeto Γ (qualquer), então é computável em tempo $4 \log |\Gamma| T(n)$ por uma MT M' com alfabeto $\{\triangleright, \square, 0, 1\}$.

Esboço da prova:

- A partir de $M = (\Gamma, Q, \delta)$, construímos $M' = (\{\triangleright, \square, 0, 1\}, Q', \delta')$
- se M ler os símbolos $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ e “faz transição”
então M' deve ler $\log |\Gamma|$ bits, entrar no estado $q_{(1, \dots, k)}$ e “fazer transição”
- $Q' = Q +$ “estados registradores” + “estados auxiliares”
observe que $|Q'| \leq c|Q||\Gamma|^{k+1}$, para alguma constante c .



Figura: Barak & Arora, pág. 16 (prova do Claim 1.5).

Outros modelos de MTs

Considere a função $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ e a função tempo construtível $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Teorema 2.2

Se f é computável em tempo $T(n)$ por uma MT M com k fitas, então é computável em tempo $5kT(n)^2$ por uma MT M' com **uma fita**.

Esboço da prova:

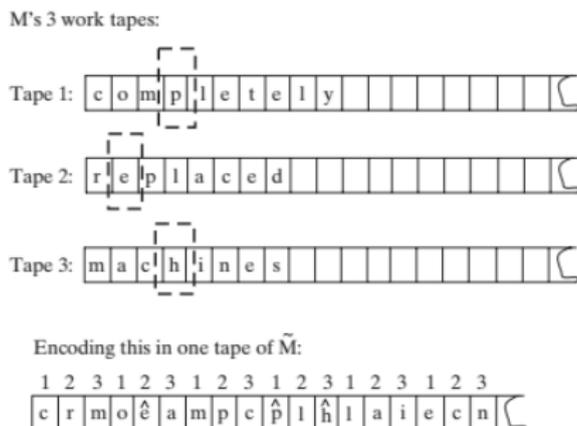


Figura: Barak & Arora, pág. 17 (prova do *Claim 1.6*).

Outros modelos de MTs

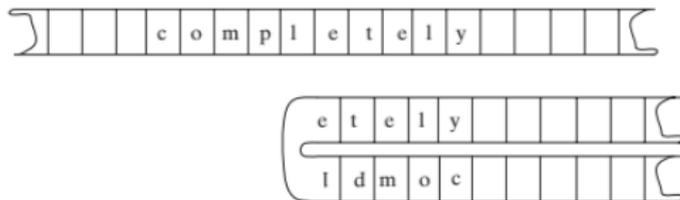
Considere a função $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ e a função tempo construtível $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Teorema 2.3

Se f é computável em tempo $T(n)$ por uma MT M com **bidirecional**, então é computável em tempo $4T(n)$ por uma MT M' **unidirecional** (i.e., nossa MT padrão).

Esboço da prova:

M 's tape is infinite in both directions:



\tilde{M} uses a larger alphabet to represent it on a standard tape:



Figura: Barak & Arora, pág. 18 (prova do *Claim* 1.8)

Def.: Máquinas de Turing Imparciais

Seja M uma MT e x uma string de entrada. Se as movimentações da cabeça de leitura de M durante a computação de x não dependem dos bits de x , então dizemos que M é uma *Máquina de Turing Imparcial* (no livro, *Oblivious Turing Machine*).

Dito de outra forma, $\forall y$, se $|y| = |x|$, os movimentos da cabeça de leitura para y são os mesmos dos movimentos para x .

Observação : Na demonstração do **Teo 2.2**, os movimentos da cabeça de leitura de M' dependem apenas do tamanho da entrada.

Corolário 2.4: M de tempo $T(n) \Rightarrow M'$ **imparcial** de tempo $T(n)^2$
(além disso, M' tem apenas uma fita)

Exercício 2.5: M de tempo $T(n) \Rightarrow M'$ **imparcial** de tempo $T(n) \log T(n)$.
(no caso de permitirmos M' ter mais fitas)

Máquina de Turing Universal Eficiente

Uma MT universal é uma MT \mathcal{U} , tal que $\mathcal{U}(\alpha, x) = M_\alpha(x)$.

- Existência de tal máquina: Turing [1936].

Teorema 2.6 [Hennie e Stearns, 1966]

Existe uma MT \mathcal{U} tal que $\forall x, \alpha \in \{0, 1\}^*$, $\mathcal{U}(\alpha, x) = M_\alpha(x)$. Além disso, se M_α para com a entrada x em T passos, então $\mathcal{U}(\alpha, x)$ para no máximo em $C \cdot T \log T$ passos, onde C é uma constante que não depende de $|x|$. A constante C depende do tamanho do alfabeto de M_α , seu número de fitas e de estados.

- Primeiro provaremos uma versão mais fraca: simulação em tempo $C \cdot T^2$
- Depois veremos como fazer a simulação em tempo $C \cdot T \log T$

Máquina de Turing Universal Eficiente

Esboço da prova da simulação em tempo $C \cdot T^2$:

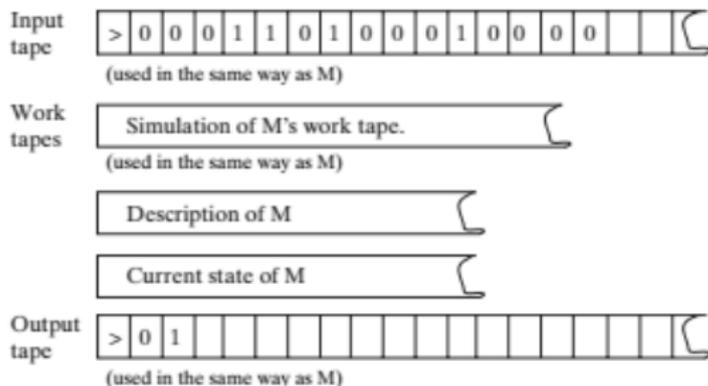
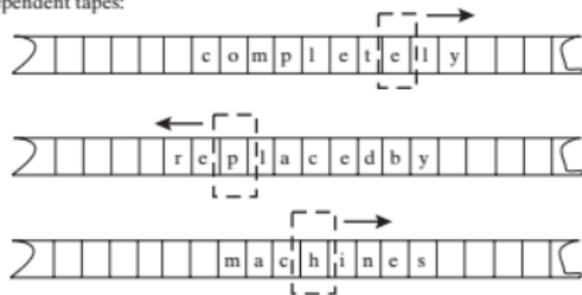


Figura: Barak & Arora, pág. 21 (versão fraca da prova do Teorema 1.9)

Máquina de Turing Universal Eficiente

Esboço da prova da simulação em tempo $C \cdot T \log T$:

M's 3 independent tapes:



U's 3 parallel tapes (i.e., one tape encoding 3 tapes)



Figura: Barak & Arora, pág. 30 (prova do Teorema 1.9)

Máquina de Turing Universal Eficiente

Esboço da prova da simulação em tempo $C \cdot T \log T$ (cont.):

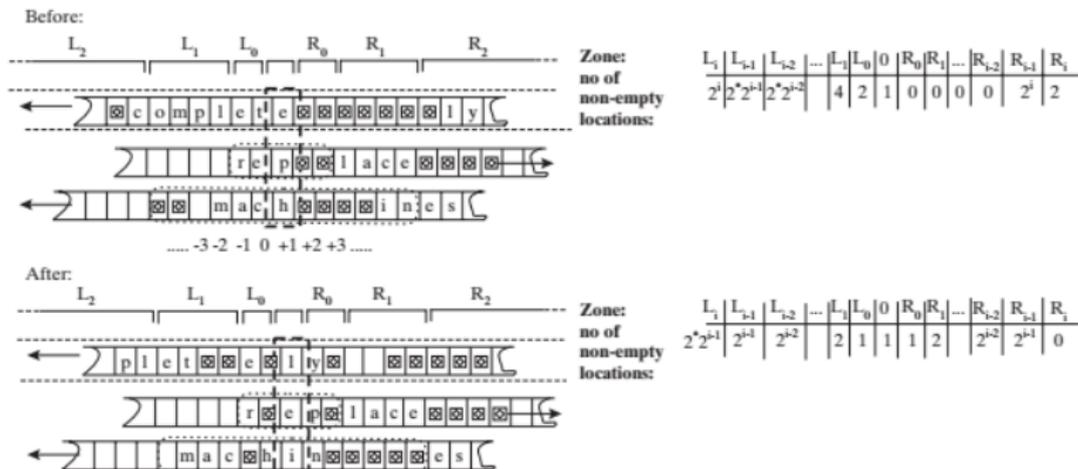
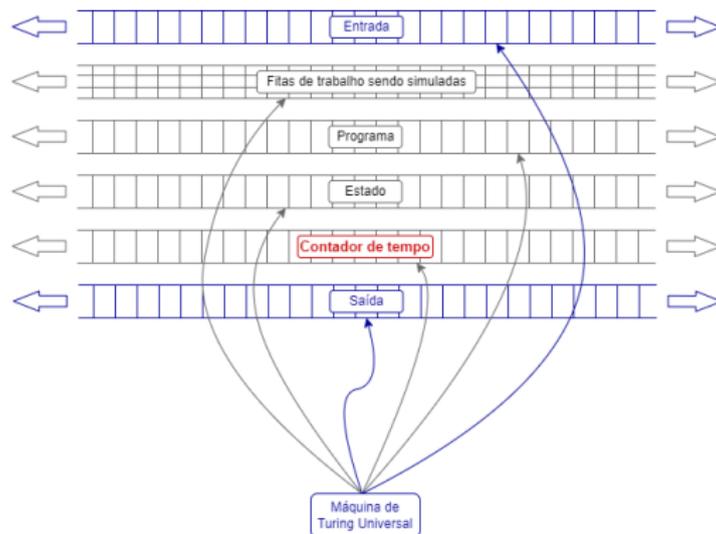


Figura: Barak & Arora, pág. 31 (prova do Teorema 1.9)

Máquina de Turing Universal Eficiente

Para finalizar, vamos adicionar um “timer” à MT universal:



Esquema geral da MT universal:

- Alfabeto estendido, infinita nas duas direções
- Múltiplas fitas de trabalho sendo simulada em uma fita
- Recebe “tempo limite” como parâmetro: $\mathcal{U}(\alpha, x, T)$

Usando os resultados anteriores, sabemos que existe uma MT universal no “modelo padrão”.