

# Tópicos em Complexidade Computacional

## As classes co-NP e NEXP

**Professor Murilo V. G. da Silva**

Departamento de Informática  
Universidade Federal do Paraná

17/06/2022

## A classe co-NP

$$\text{co-NP} = \{L : \bar{L} \in \text{NP}\}$$

Exemplo:  $\overline{\text{SAT}} \in \text{co-NP}$

**Exercício 4.1:**  $P \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$ .

Pergunta:  $\overline{\text{SAT}} \in \text{NP}$ ?

Resposta: Conjectura-se que isso seja falso.

## A classe co-NP (definição alternativa)

Uma linguagem  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  está em **co-NP** se existe um polinômio  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e existe uma MT polinomial  $M$  tal que  $\forall x \in \{0, 1\}^*$

$$x \in L \Leftrightarrow \forall u \in \{0, 1\}^{p(|x|)} : M(x, u) = 1$$

Exemplo: TAUTOLOGIA =  $\{\neg\phi \mid \phi \text{ é uma tautologia}\}$ .

**Observação:** TAUTOLOGIA é co-NP-completo (análogo ao Teorema de Cook-Levin)

**Pergunta (\*):** NP  $\neq$  co-NP?

**Exercício 4.2:** P = NP  $\Rightarrow$  NP = coNP

**Corolário 4.3:** NP  $\neq$  coNP  $\Rightarrow$  P  $\neq$  NP **Pergunta (\*) não é fácil de responder!**

# A classe NEXP

## A classe NEXP

$$\text{NEXP} = \bigcup_{c \geq 1} \text{NTIME}(2^{n^c})$$

Exercício 4.4:  $\text{EXP} \subseteq \text{NEXP}$

A partir de Teo 3.2 e Exe 4.4, temos  $\text{P} \subseteq \text{NP} \subseteq \text{EXP} \subseteq \text{NEXP}$

Pergunta:  $\text{EXP} \subsetneq \text{NEXP}$ ?

Responder isso também não é fácil:

## Teorema 4.5

$$\text{EXP} \neq \text{NEXP} \Rightarrow \text{P} \neq \text{NP}$$

Prova: Mostraremos a contrapositiva (i.e.,  $\text{P} = \text{NP} \Rightarrow \text{EXP} = \text{NEXP}$ )

# A classe NEXP

Mas, antes precisaremos mostrar o seguinte:

## Lema 4.6

Seja  $L$  uma linguagem de NEXP qualquer. Então

$$L_{\text{PAD}} = \{ \langle x, 1^{2^{|x|^c}} \rangle : x \in L \} \text{ está em NP.}$$

Prova:

- Seja  $M$  a MTN exponencial para  $L$
- Seja  $c$  a constante tal que  $L \in \text{NTIME}(2^{n^c})$
- Apresentaremos a MTN  $M'$  polinomial que toma  $y$  e decide se  $y \in L_{\text{PAD}}$ .
  - testa se  $y$  tem “forma” correta, i.e., se  $\exists z$  tal que  $\langle z, 1^{2^{|z|^c}} \rangle = y$
  - Simula  $M(z)$  por  $2^{|z|^c}$  passos
- $M'$  retorna o que  $M$  retorna
- Observe que  $M'$  é polinomial em  $y$ .
- $L_{\text{PAD}} \in \text{NP}$ .

# A classe NEXP

Provando que  $P = NP \Rightarrow EXP = NEXP$

- Sabemos que  $EXP \subseteq NEXP$  (Ex 4.4)
- Portanto basta provar que  $P = NP \Rightarrow NEXP \subseteq EXP$
- Suponha que  $P = NP$  e seja  $L \in NEXP$ 
  - **Lema 5**  $\Rightarrow L_{PAD} \in NP$
  - $P = NP \Rightarrow L_{PAD} \in P$
  - Mostraremos uma MT exponencial  $M$  para  $L$ :
    - Dado  $x$ , “estofe” a string para obter  $y = \langle x, 1^{2^{|x|^c}} \rangle$  (custo exp. em  $x$ )  
(obs: a constante  $c$  vem da MTN para  $L$ )
    - Teste se  $y \in L_{PAD}$  (custo exp. em  $x$ )
  - Ou seja,  $L \in EXP$ .
  - Logo  $NEXP \subseteq EXP$ .