Tópicos em Complexidade Computacional

Teoremas de Hierarquia

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

17/06/2022

"Separando" classes de complexidade

Conceito básico em complexidade computacional:

- Mostrar que classes A e B são diferentes
- e.g., $\mathrm{P} \neq \mathrm{EXP}$, $\mathrm{DIME}(n^2) \neq \mathrm{DTIME}(n^3)$, etc

- Mostrar uma "máquina de $B \neq$ de todas máquinas de A"
  (mas máquinas dão respostas diferentes para pelo menos uma entrada)

Técnica vista nesta aula:

- Diagonalização
- Máquinas tratadas como "caixa preta"
- Tipicamente requer:
  - Máquinas podem ser representadas por strings
  - Existência de MT universal eficiente

Hierarquia de Tempo (determinística)

Teorema 5.1: Hierarquia de Tempo [Hartmanis/Stearns 1965]

Se f e g são funções tempo construtíveis tal que $f(n) \cdot \log f(n) = o(g(n))$, então

$$\mathrm{DTIME}(f(n)) \subsetneq \mathrm{DTIME}(g(n))$$

Prova:

- Veremos primeiro $\mathrm{DTIME}(n) \subsetneq \mathrm{DTIME}(n^2)$
- Depois generalizaremos para f e g como no enunciado

Hierarquia de Tempo (determinística)

Provando que $\mathrm{DTIME}(n) \subsetneq \mathrm{DTIME}(n^2)$

- Considere a linguagem $L_D = L(D)$ da MT D abaixo:
- $D(x)\{$

  Se $\mathcal{U}(M_x, x, |x|^{1.9})$ "chegou no fim da simulação"

  retorna oposto de $\mathcal{U}(M_x, x, |x|^{1.9})$

  Senão

  retorna 0

  $\}$
- Portanto $L_D \in \mathrm{DTIME}(n^2)$
- Mostrando agora que $L_D \notin \mathrm{DTIME}(n)$:
  - Suponha que $\forall y$, MT M decide se $y \in L_D$ em $c \cdot |y|$ passos
  - M e D decidem a mesma linguagem $\Rightarrow \forall y$, $M(y) = D(y)$
  - Considere string $y = \llcorner M \lrcorner$ suficientemente grande
    - Note: Para $\llcorner M \lrcorner$ grande, temos $|\llcorner M \lrcorner|^{1.9} > c \cdot |\llcorner M \lrcorner|$
    - i.e., $|\llcorner M \lrcorner|^{1.9}$ passos é suficiente para "chegar ao fim da simulação"
  - Neste caso $D(\llcorner M \lrcorner)$ é oposto de $M(\llcorner M \lrcorner)$
  - Contradição

Hierarquia de Tempo (determinística)

Provando que $\mathrm{DTIME}(f(n)) \subsetneq \mathrm{DTIME}(g(n))$ onde $f(n) \cdot \log f(n) = o(g(n))$

- Considere a linguagem L_D da MT D abaixo:
- $D(x)\{$

  Se $\mathcal{U}(M_x, x, g(|x|) - 1)$ "chegou no fim da simulação"

  retorna oposto de $\mathcal{U}(M_x, x, g(|x|) - 1))$

  Senão

  retorna 0

  $\}$
- Portanto $L_D \in \mathrm{DTIME}(g(n))$
- Mostrando agora que $L_D \notin \mathrm{DTIME}(f(n))$:
  - Suponha que $\forall y$, MT M decide se $y \in L_D$ em $c \cdot f(|y|)$ passos
  - M e D decidem a mesma linguagem $\Rightarrow \forall y,\ M(y) = D(y)$
  - Considere string $y = \llcorner M \lrcorner$ suficientemente grande
    - Note: Para $\llcorner M \lrcorner$ grande, temos $g(|\llcorner M \lrcorner|) - 1 > c \cdot c' \cdot f(|\llcorner M \lrcorner|) \log f(|\llcorner M \lrcorner|)$
    - i.e., $g(|\llcorner M \lrcorner|) - 1$ passos é suficiente para "chegar ao fim da simulação"
  - Neste caso $D(\llcorner M \lrcorner)$ é oposto de $M(\llcorner M \lrcorner)$
  - Contradição

Hierarquia de Tempo (não determinística)

Teorema 5.2: Hierarquia de Tempo (não det.) [Cook 1972]

Se f e g são funções tempo construtíveis tal que $f(n) + 1 = o(g(n))$, então

$$\mathrm{NDTIME}(f(n)) \subsetneq \mathrm{NDTIME}(g(n))$$

Prova:

- Possível tópico para trabalho da disciplina

Relação entre as classes vistas até agora

Lembramos que $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{NEXP}$

A partir dos Teoremas de Hierarquia de tempo, temos:

Corolário 5.3: $\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{EXP}$

Corolário 5.4: $\mathrm{NP} \subsetneq \mathrm{NEXP}$