Tópicos em Complexidade Computacional

Complexidade de Espaço

Professor Murilo V. G. da Silva

Departamento de Informática

Universidade Federal do Paraná

07/07/2022

Complexidade de Espaço

Complexidade de Espaço

Seja $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ uma função computada por uma MT M e seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

- M computa f em *espaço $s(n)$*
  se o número de células utilizadas nas fitas de leitura/escrita é $s(|x|)$.

$\mathrm{SPACE}(s(n))$ e $\mathrm{NSPACE}(s(n))$

Dada $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a classe $\mathrm{SPACE}(s(n))$ é o conjunto de toda linguagem L, tal que

- Existe uma MT M que decide L com complexidade de espaço $c \cdot s(n)$, para algum $c > 0$

A classe $\mathrm{NSPACE}(s(n))$ é definida analogamente.

- Definição de *espaço-contrutível* é análoga (restrição muda para $s(n) > \log n$)
- Classes relevantes:

$$\mathrm{PSPACE} = \bigcup_{c>0} \mathrm{SPACE}(n^c) \qquad \mathrm{NPSPACE} = \bigcup_{c>0} \mathrm{NSPACE}(n^c)$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{SPACE}(\log n) \qquad \mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log n)$$

Complexidade de Espaço

Teorema 9.1

Seja $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função espaço construtível

$$\mathrm{DTIME}(s(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(s(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(s(n)) \subseteq DTIME(2^{\mathcal{O}(S(n))})$$

Ideia da prova: Para o caso mais difícil, i.e., $\mathrm{NSPACE}(s(n)) \subseteq DTIME(2^{\mathcal{O}(S(n))})$:

- Ver que há limite para possíveis configurações da MT de espaço polinomial.
- Formalizado com idéia do "grafo de configurações"

Corolário 9.2: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXP}$

Algoritmo para resolver 3SAT em espaço polinomial:

- Cada valoração precisa de espaço linear
- Teste valoração v_i, apague a fita, e vá para a próxima valoração v_{i+1}
- São 2^n valorações (tempo exponencial)
- Mas o espaço usado é polinomial

Corolário 9.3: $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$

Complexidade de Espaço

Teorema 9.4: Hierarquia de Espaço [Stearn/Hartmanis/Lewis 1965]

Se f e g são funções tempo construtíveis tal que $f(n) = o(g(n))$, então

$$\mathrm{SPACE}(f(n)) \subsetneq \mathrm{SPACE}(g(n))$$

PSPACE, NPSPACE e PSPACE-completude

- L é PSPACE-difícil: $\forall L' \in \text{PSPACE}$, $L' \leq_p L$
- L é PSPACE-completa: L é PSPACE-difícil e $L \in \text{PSPACE}$

Exercício 9.5: $\text{S-TMSAT} = \{\langle M, w, 1^n\rangle \ : \ M$ aceita w em espaço $n\}$ é PSPACE-completo.

Problema mais interessante:

Fórmula Booleana Quantificada: $Q_1 x_1 \ Q_2 x_2 \ \ldots . \ Q_n x_n \ \phi(x_1, \ldots, x_n)$

- Cada Q_i é do tipo $\forall$ ou $\exists$ e toda variável deve estar quantificada
- Estamos assumindo fórmula em *prenex* (mas não precisávamos)
- Podemos (ou não) assumir que ϕ está em CNF
- Exemplo: $\forall x_1 \ \exists x_2 \ (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$ é uma fórmula verdadeira

Problema: $\text{TQBF} = \{$"fórmulas QBF verdadeiras"$\}$

Teorema 9.6 [Stockmeyer/Meyer (1973)]: TQBF é PSPACE-completo.

Teorema 9.7: $\text{PSPACE} = \text{NPSPACE}$

Ideia da Prova: A demonstração anterior funciona para NPSPACE

PSPACE, NPSPACE e PSPACE-completude

De fato, é possível simular espaço não determinístico com "overhead" quadrático:

Teorema 9.8 [Savich (1970)]: $\mathrm{NSPACE}(s(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(s(n)^2)$. ($s$ é espaço construtível)

Note: Isso também implica em $\mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE}$

O jogo QBF:

- Tabuleiro é uma fórmula booleana $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$
- Jogadores escolhem valores 0,1 para $x_1, x_2, \ldots$ alternadamente
- Jogador 1 ganha se no final $\phi(x_1, \ldots, x_{2n}) = 1$

Pergunta: O jogador 1 tem estratégia vencedora? Ou seja, $\exists x_1 \ \forall x_2 \ \ldots. \ \forall x_n \ \phi(x_1, \ldots, x_{2n}) = 1$

Este problema é PSPACE-completo.

Espaço logarítmico

$\mathrm{PATH} = \{\langle G, s, t\rangle \ : \ G$ possui um caminho (direcionado) ligando s à $t\}$
$\mathrm{U\text{-}PATH} = \{\langle G, s, t\rangle \ : \ G$ possui um caminho (não direcionado) ligando s à $t\}$

Teorema 9.9: PATH é NL-completo (completude sob reduções de espaço logarítmico)

Corolário 9.10: Se $\mathrm{PATH} \in L$, então $\mathrm{L} = \mathrm{NL}$

- Obs: Existe uma definição alternativa para NP em termos de certificados "read once"

Teorema 9.11 [Immerman-Szelepcsényi ('87, '88)]

$$\overline{\mathrm{PATH}} \in NL$$

Corolário 9.12: $\mathrm{NL} =$ co-NL

Teorema 9.13 [Reingold (2004)]: $\mathrm{U\text{-}PATH} \in L$

Teorema 9.14: $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXP} \subseteq \mathrm{NEXP}$