

Computação Quântica

Aula 09

Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

Ponto chave em algoritmos quânticos:

Ponto chave em algoritmos quânticos:

- Uma vez que temos *qubits* ao invés de *bits*, a ideia é criar manipular superposições “interessantes”

Ponto chave em algoritmos quânticos:

- Uma vez que temos *qubits* ao invés de *bits*, a ideia é criar manipular superposições “interessantes”
- Na aula de hoje veremos a técnica mais importante neste contexto: Amostragem de Fourier

A transformada de Hadamard



1-bit clássico na entrada

- $H|0\rangle =$

A transformada de Hadamard



1-bit clássico na entrada

- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

A transformada de Hadamard



1-bit clássico na entrada

- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- $H|1\rangle =$

A transformada de Hadamard



1-bit clássico na entrada

- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

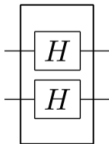
A transformada de Hadamard



1-bit clássico na entrada

- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- nada de novo até agora...

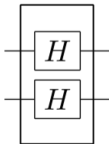
A transformada de Hadamard



2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle =$

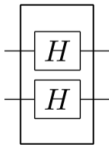
A transformada de Hadamard



2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$

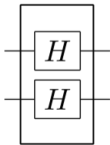
A transformada de Hadamard



2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle =$

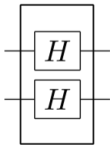
A transformada de Hadamard



2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$

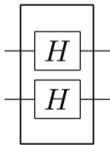
A transformada de Hadamard



2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |10\rangle =$

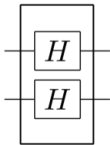
A transformada de Hadamard



2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |10\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$

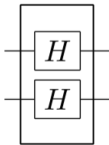
A transformada de Hadamard



2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |10\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |11\rangle =$

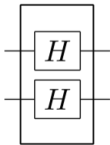
A transformada de Hadamard



2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |10\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |11\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$

A transformada de Hadamard



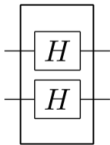
2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |10\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |11\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$

Note:

- Dada uma string clássica u acima, em $H^{\otimes 2} |u\rangle$, temos que...

A transformada de Hadamard



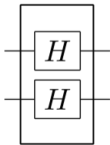
2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |10\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |11\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$

Note:

- Dada uma string clássica u acima, em $H^{\otimes 2} |u\rangle$, temos que...
- ...sinal do termo $\frac{1}{2} |x\rangle$ depende de

A transformada de Hadamard



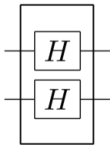
2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |10\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |11\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$

Note:

- Dada uma string clássica u acima, em $H^{\otimes 2} |u\rangle$, temos que...
- ...sinal do termo $\frac{1}{2} |x\rangle$ depende de $x \cdot u$

A transformada de Hadamard



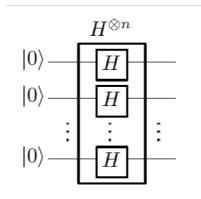
2-bits clássicos na entrada

- $H^{\otimes 2} |00\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |01\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |10\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle - \frac{1}{2} |11\rangle$
- $H^{\otimes 2} |11\rangle = +\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{1}{2} |01\rangle - \frac{1}{2} |10\rangle + \frac{1}{2} |11\rangle$

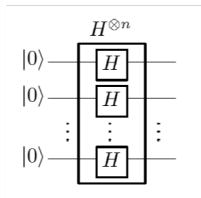
Note:

- Dada uma string clássica u acima, em $H^{\otimes 2} |u\rangle$, temos que...
- ...sinal do termo $\frac{1}{2} |x\rangle$ depende de $x \cdot u$
- Especificamente, o termo é multiplicado por $(-1)^{x \cdot u}$

A transformada de Hadamard

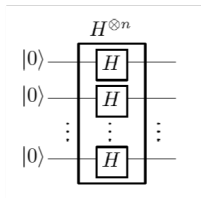


A transformada de Hadamard



Caso geral: Seja u uma string de n bits clássica

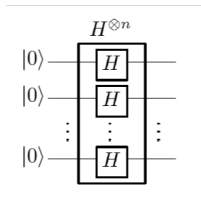
A transformada de Hadamard



Caso geral: Seja u uma string de n bits clássica

$$H^{\otimes n} |u\rangle =$$

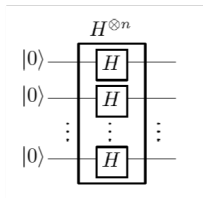
A transformada de Hadamard



Caso geral: Seja u uma string de n bits clássica

$$H^{\otimes n} |u\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_x (-1)^{u \cdot x} |x\rangle$$

A transformada de Hadamard



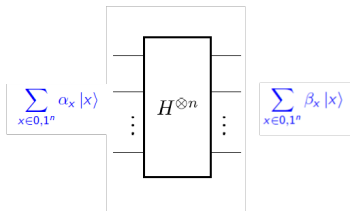
Caso geral: Seja u uma string de n bits clássica

$$H^{\otimes n} |u\rangle = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_x (-1)^{u \cdot x} |x\rangle$$

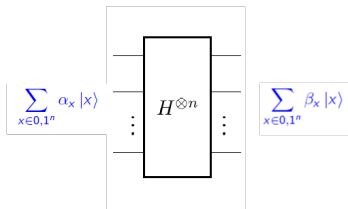
Obs: Notação ligeiramente diferente encontrada na literatura:

$$H^{\otimes n} |u\rangle_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{u \cdot x} |x\rangle_n$$

Amostragem de Fourier

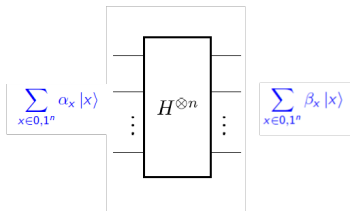


Amostragem de Fourier



A seguinte técnica é conhecida como amostragem de Fourier:

Amostragem de Fourier

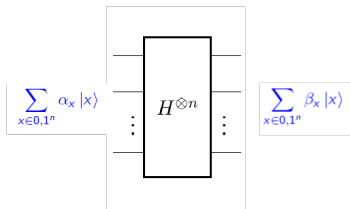


A seguinte técnica é conhecida como amostragem de Fourier:

- Aplicar a transformada de Hadamard em alguma superposição

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} \alpha_x |x\rangle \longrightarrow \sum_{x \in \{0,1\}^n} \beta_x |x\rangle$$

Amostragem de Fourier



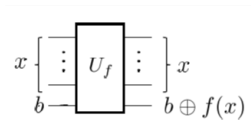
A seguinte técnica é conhecida como amostragem de Fourier:

- Aplicar a transformada de Hadamard em alguma superposição

$$\sum_{x \in \{0,1\}^n} \alpha_x |x\rangle \longrightarrow \sum_{x \in \{0,1\}^n} \beta_x |x\rangle$$

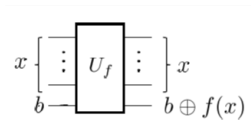
- Depois medir, obtendo obter x com probabilidade $|\beta|^2$

A técnica “phase kick-back”



Considere o circuito acima que computa a função booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

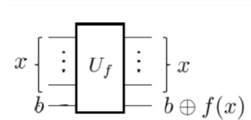
A técnica “phase kick-back”



Considere o circuito acima que computa a função booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

- Lembramos que a saída $f(x)$ em circuitos quânticos é um $\oplus$ com 0's de entrada.

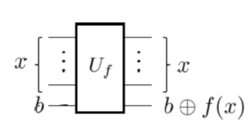
A técnica “phase kick-back”



Considere o circuito acima que computa a função booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

- Lembramos que a saída $f(x)$ em circuitos quânticos é um $\oplus$ com 0's de entrada.
- Em muitos casos será útil setar tais bits de entrada com qubits $b \neq 0$, o que será o caso para fazermos *phase kick-back*.

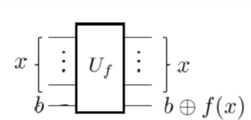
A técnica “phase kick-back”



Considere o circuito acima que computa a função booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

- Lembramos que a saída $f(x)$ em circuitos quânticos é um $\oplus$ com 0's de entrada.
- Em muitos casos será útil setar tais bits de entrada com qubits $b \neq 0$, o que será o caso para fazermos *phase kick-back*.
- O que faremos é setar tal qubit da entrada para $|-\rangle$.

A técnica “phase kick-back”

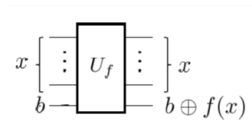


Considere o circuito acima que computa a função booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

- Lembramos que a saída $f(x)$ em circuitos quânticos é um $\oplus$ com 0's de entrada.
- Em muitos casos será útil setar tais bits de entrada com qubits $b \neq 0$, o que será o caso para fazermos *phase kick-back*.
- O que faremos é setar tal qubit da entrada para $|-\rangle$.

Afirmção: $U_f |x\rangle |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle |-\rangle$

A técnica “phase kick-back”



Considere o circuito acima que computa a função booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

- Lembramos que a saída $f(x)$ em circuitos quânticos é um $\oplus$ com 0's de entrada.
- Em muitos casos será útil setar tais bits de entrada com qubits $b \neq 0$, o que será o caso para fazermos *phase kick-back*.
- O que faremos é setar tal qubit da entrada para $|-\rangle$.

Afirmção: $U_f |x\rangle |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle |-\rangle$

Prova: Próximo slide.

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

Prova:

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

Prova: $U_f |x\rangle_n |-\rangle =$

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

Prova: $U_f |x\rangle_n |-\rangle = U_f |x\rangle_n \left(\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

Prova: $U_f |x\rangle_n |-\rangle = U_f |x\rangle_n \left(\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = U_f \left(\frac{|x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |- \rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |- \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Prova: } U_f |x\rangle_n |- \rangle &= U_f |x\rangle_n \left(\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = U_f \left(\frac{|x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \left(\frac{U_f |x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{U_f |x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{por linearidade} \end{aligned}$$

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

Prova: $U_f |x\rangle_n |-\rangle = U_f |x\rangle_n \left(\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = U_f \left(\frac{|x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$

$$= \left(\frac{U_f |x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{U_f |x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{por linearidade}$$

$$= \left(\frac{|x\rangle_n |0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{aplicação do circuito } U_f$$

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

Prova: $U_f |x\rangle_n |-\rangle = U_f |x\rangle_n \left(\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = U_f \left(\frac{|x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$

$$= \left(\frac{U_f |x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{U_f |x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{por linearidade}$$

$$= \left(\frac{|x\rangle_n |0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{aplicação do circuito } U_f$$

$$= |x\rangle_n \left(\frac{|0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

Prova: $U_f |x\rangle_n |-\rangle = U_f |x\rangle_n \left(\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = U_f \left(\frac{|x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$

$$= \left(\frac{U_f |x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{U_f |x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{por linearidade}$$

$$= \left(\frac{|x\rangle_n |0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{aplicação do circuito } U_f$$

$$= |x\rangle_n \left(\frac{|0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= |x\rangle_n \left(\frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

Prova: $U_f |x\rangle_n |-\rangle = U_f |x\rangle_n \left(\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = U_f \left(\frac{|x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$

$$= \left(\frac{U_f |x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{U_f |x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{por linearidade}$$

$$= \left(\frac{|x\rangle_n |0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{aplicação do circuito } U_f$$

$$= |x\rangle_n \left(\frac{|0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= |x\rangle_n \left(\frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= |x\rangle_n (-1)^{f(x)} \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{visto em sala}$$

A técnica “phase kick-back”

Seja $f : \{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}$ e U_f o circuito quântico computando f . Então

$$U_f |x\rangle_n |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$

Prova: $U_f |x\rangle_n |-\rangle = U_f |x\rangle_n \left(\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = U_f \left(\frac{|x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$

$$= \left(\frac{U_f |x\rangle_n |0\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{U_f |x\rangle_n |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{por linearidade}$$

$$= \left(\frac{|x\rangle_n |0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|x\rangle_n |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{aplicação do circuito } U_f$$

$$= |x\rangle_n \left(\frac{|0 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= |x\rangle_n \left(\frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= |x\rangle_n (-1)^{f(x)} \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{visto em sala}$$

$$= (-1)^{f(x)} |x\rangle_n |-\rangle$$