Computação Quântica
Aula 14

Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

Trasformada quântica de Fourier

DFT e QFT:

- Propriedades das raízes de $x^n = 1$ – aula passada
- A transformada discreta de Fourier (DFT) – aula passada
- A transformada quântica de Fourier (QFT) – aula passada
- Propriedades da DFT/QFT – aula de hoje

Primeira propriedade útil da QFT:

- Superposições e shits circulares

QFT e superposições circulares

- Seja $|\Phi\rangle \in \mathbb{C}_M$ e F_M a matriz da QFT

QFT e superposições circulares

- Seja $|\Phi\rangle \in \mathbb{C}_M$ e F_M a matriz da QFT
- Seja $|\Phi'\rangle$ o vetor obtido de "shift circular" de j posições de $|\Phi\rangle$

QFT e superposições circulares

- Seja $|\Phi\rangle \in \mathbb{C}_M$ e F_M a matriz da QFT
- Seja $|\Phi'\rangle$ o vetor obtido de "shift circular" de j posições de $|\Phi\rangle$
- Se $F_M |\Phi\rangle = |\Psi\rangle$, então $F_M |\Phi'\rangle = \omega^j |\Psi\rangle$.

QFT e superposições circulares

- Seja $|\Phi\rangle \in \mathbb{C}_M$ e F_M a matriz da QFT
- Seja $|\Phi'\rangle$ o vetor obtido de "shift circular" de j posições de $|\Phi\rangle$
- Se $F_M |\Phi\rangle = |\Psi\rangle$, então $F_M |\Phi'\rangle = \omega^j |\Psi\rangle$.
- Lembre que $|\omega^j| = 1$

QFT e superposições circulares

- Seja $|\Phi\rangle \in \mathbb{C}_M$ e F_M a matriz da QFT
- Seja $|\Phi'\rangle$ o vetor obtido de "shift circular" de j posições de $|\Phi\rangle$
- Se $F_M |\Phi\rangle = |\Psi\rangle$, então $F_M |\Phi'\rangle = \omega^j |\Psi\rangle$.
- Lembre que $|\omega^j| = 1$

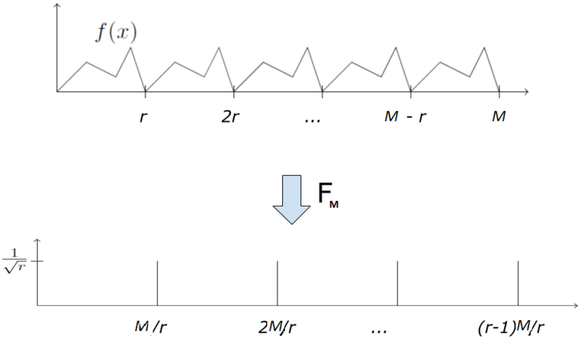
Ou seja, se o objetivo é fazer uma medida após a QFT, um shift circular não altera a distribuição de probabilidade dos estados resultantes

Segunda propriedade útil da QFT:

- Superposições periódicas

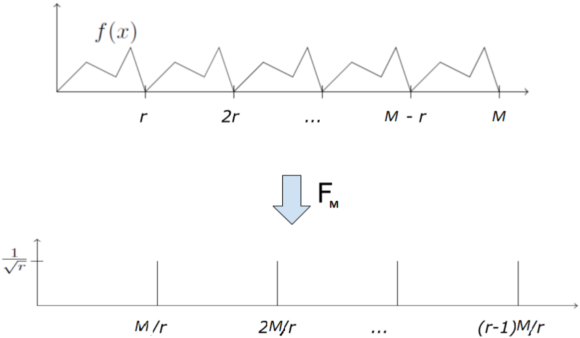
QFT e funções periódicas

Aplicamos a QFT F_M a um vetor de amplitudes periódico, com período r:



QFT e funções periódicas

Aplicamos a QFT F_M a um vetor de amplitudes periódico, com período r:

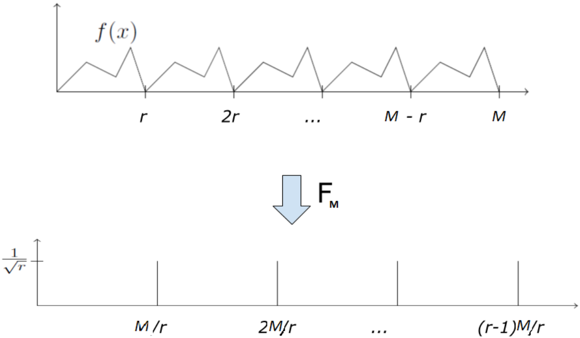


Resultado:

- Saída também é um vetor de amplitudes periódico, agora com período M/r

QFT e funções periódicas

Aplicamos a QFT F_M a um vetor de amplitudes periódico, com período r:

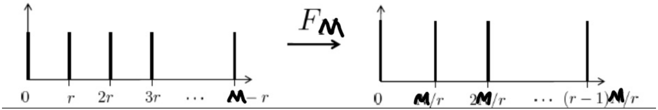


Resultado:

- Saída também é um vetor de amplitudes periódico, agora com período M/r
- Vamos ver agora um caso particular desta propriedad que nos será útil no Algoritmo de Shor.

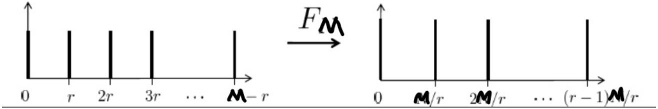
QFT e funções periódicas

O caso particular é ilustrado pela figura abaixo:



QFT e funções periódicas

O caso particular é ilustrado pela figura abaixo:

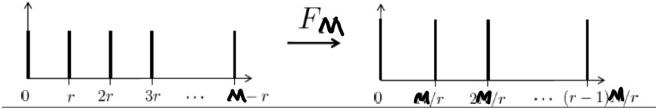


Amplitudes de α_r entrada:

- As amplitudes α_r, para $r = 0, 1, 2, ..., (M/r - 1)r$ são todas iguais e todas maiores que zero.

QFT e funções periódicas

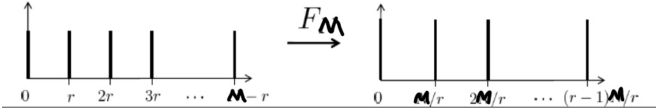
O caso particular é ilustrado pela figura abaixo:



Amplitudes de α_r entrada:

- As amplitudes α_r, para $r = 0, 1, 2, ..., (M/r - 1)r$ são todas iguais e todas maiores que zero.
- As demais amplitudes são todas iguais a zero.

O caso particular é ilustrado pela figura abaixo:

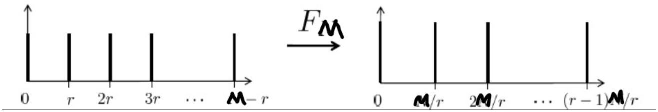


Amplitudes de α_r entrada:

- As amplitudes α_r, para $r = 0, 1, 2, ..., (M/r - 1)r$ são todas iguais e todas maiores que zero.
- As demais amplitudes são todas iguais a zero.
- Pergunta: Qual o valor de cada amplitudes α_r?

QFT e funções periódicas

O caso particular é ilustrado pela figura abaixo:

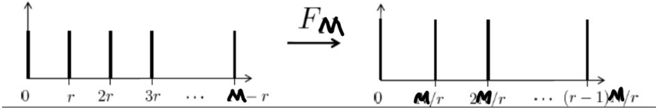


Amplitudes de α_r entrada:

- As amplitudes α_r, para $r = 0, 1, 2, ..., (M/r - 1)r$ são todas iguais e todas maiores que zero.
- As demais amplitudes são todas iguais a zero.
- Pergunta: Qual o valor de cada amplitudes α_r? Resposta: $\sqrt{\frac{r}{M}}$.

QFT e funções periódicas

O caso particular é ilustrado pela figura abaixo:



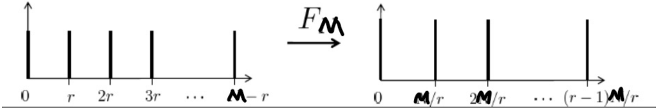
Amplitudes de α_r entrada:

- As amplitudes α_r, para $r = 0, 1, 2, ..., (M/r - 1)r$ são todas iguais e todas maiores que zero.
- As demais amplitudes são todas iguais a zero.
- Pergunta: Qual o valor de cada amplitudes α_r? Resposta: $\sqrt{\frac{r}{M}}$.

Amplitudes de saída β_k devem ser:

QFT e funções periódicas

O caso particular é ilustrado pela figura abaixo:



Amplitudes de α_r entrada:

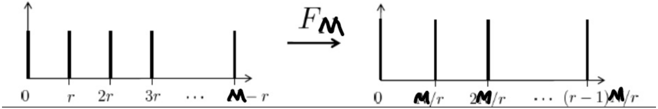
- As amplitudes α_r, para $r = 0, 1, 2, ..., (M/r - 1)r$ são todas iguais e todas maiores que zero.
- As demais amplitudes são todas iguais a zero.
- Pergunta: Qual o valor de cada amplitudes α_r? Resposta: $\sqrt{\frac{r}{M}}$.

Amplitudes de saída β_k devem ser:

- Para $k = 0, \frac{M}{r}, \frac{2M}{r}, \frac{3M}{r}, ..., \frac{(r-1)M}{r}$ as amplitudes devem ser iguais a $\frac{1}{\sqrt{r}}$

QFT e funções periódicas

O caso particular é ilustrado pela figura abaixo:



Amplitudes de α_r entrada:

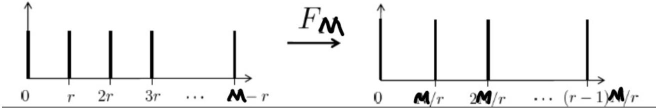
- As amplitudes α_r, para $r = 0, 1, 2, ..., (M/r - 1)r$ são todas iguais e todas maiores que zero.
- As demais amplitudes são todas iguais a zero.
- Pergunta: Qual o valor de cada amplitudes α_r? Resposta: $\sqrt{\frac{r}{M}}$.

Amplitudes de saída β_k devem ser:

- Para $k = 0, \frac{M}{r}, \frac{2M}{r}, \frac{3M}{r}, ..., \frac{(r-1)M}{r}$ as amplitudes devem ser iguais a $\frac{1}{\sqrt{r}}$
- iguais a zero para as demais posições do vetor de amplitudes.

QFT e funções periódicas

O caso particular é ilustrado pela figura abaixo:



Amplitudes de α_r entrada:

- As amplitudes α_r, para $r = 0, 1, 2, ..., (M/r - 1)r$ são todas iguais e todas maiores que zero.
- As demais amplitudes são todas iguais a zero.
- Pergunta: Qual o valor de cada amplitudes α_r? Resposta: $\sqrt{\frac{r}{M}}$.

Amplitudes de saída β_k devem ser:

- Para $k = 0, \frac{M}{r}, \frac{2M}{r}, \frac{3M}{r}, ..., \frac{(r-1)M}{r}$ as amplitudes devem ser iguais a $\frac{1}{\sqrt{r}}$
- iguais a zero para as demais posições do vetor de amplitudes.
- Vamos provar que a QFT tem de fato esta propriedade neste caso particular

  (não precisamos da propriedade da QFT em funções periódicas em geral no Algoritmo de Shor)

Prova:

QFT e funções periódicas

Prova:

- Vetor de entrada: $\sqrt{\frac{r}{M}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} |jr\rangle$

Prova:

- Vetor de entrada: $\sqrt{\frac{r}{M}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} |jr\rangle$
- Vamos calcular as amplitudes β_j do vetor de saída.

QFT e funções periódicas

Prova:

- Vetor de entrada: $\sqrt{\frac{r}{M}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} |jr\rangle$
- Vamos calcular as amplitudes β_j do vetor de saída.
- Vamos olhar para os β_j, onde j é um múltiplo de $\frac{M}{r}$, ou seja, $j = \frac{kM}{r}$

QFT e funções periódicas

Prova:

- Vetor de entrada: $\sqrt{\frac{r}{M}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} |jr\rangle$
- Vamos calcular as amplitudes β_j do vetor de saída.
- Vamos olhar para os β_j, onde j é um múltiplo de $\frac{M}{r}$, ou seja, $j = \frac{kM}{r}$
- O valor $\beta_{\frac{kM}{r}}$ é o produto da $(\frac{kM}{r})$-ésima linha de F_M pelo vetor de entrada

QFT e funções periódicas

Prova:

- Vetor de entrada: $\sqrt{\frac{r}{M}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} |jr\rangle$
- Vamos calcular as amplitudes β_j do vetor de saída.
- Vamos olhar para os β_j, onde j é um múltiplo de $\frac{M}{r}$, ou seja, $j = \frac{kM}{r}$
- O valor $\beta_{\frac{kM}{r}}$ é o produto da $(\frac{kM}{r})$-ésima linha de F_M pelo vetor de entrada

  (Atenção, nesta notação a primeira linha é a 0-ésima linha)
- Portanto $\beta_{\frac{kM}{r}} = \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} \sqrt{\frac{r}{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{M}} \, \omega^{jr \, \frac{kM}{r}} =$

QFT e funções periódicas

Prova:

- Vetor de entrada: $\sqrt{\frac{r}{M}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} |jr\rangle$
- Vamos calcular as amplitudes β_j do vetor de saída.
- Vamos olhar para os β_j, onde j é um múltiplo de $\frac{M}{r}$, ou seja, $j = \frac{kM}{r}$
- O valor $\beta_{\frac{kM}{r}}$ é o produto da $(\frac{kM}{r})$-ésima linha de F_M pelo vetor de entrada

(Atenção, nesta notação a primeira linha é a 0-ésima linha)

- Portanto $\beta_{\frac{kM}{r}} = \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} \sqrt{\frac{r}{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{M}} \omega^{jr\ \frac{kM}{r}} = \frac{M}{r} \frac{\sqrt{r}}{M} = \frac{1}{\sqrt{r}}$

Prova:

- Vetor de entrada: $\sqrt{\frac{r}{M}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} |jr\rangle$
- Vamos calcular as amplitudes β_j do vetor de saída.
- Vamos olhar para os β_j, onde j é um múltiplo de $\frac{M}{r}$, ou seja, $j = \frac{kM}{r}$
- O valor $\beta_{\frac{kM}{r}}$ é o produto da $(\frac{kM}{r})$-ésima linha de F_M pelo vetor de entrada

(Atenção, nesta notação a primeira linha é a 0-ésima linha)

- Portanto $\beta_{\frac{kM}{r}} = \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} \sqrt{\frac{r}{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{M}}\, \omega^{jr\, \frac{kM}{r}} = \frac{M}{r}\, \frac{\sqrt{r}}{M} = \frac{1}{\sqrt{r}}$

Como cada uma das r amplitudes $\beta_{\frac{kM}{r}}$ é igual a $\frac{1}{\sqrt{r}}$ e o a soma do quadrado do módulo destas r amplitudes β_j é 1, as demais amplitudes devem ser 0, e o teorema está provado.

QFT e funções periódicas

Prova:

- Vetor de entrada: $\sqrt{\frac{r}{M}} \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} |jr\rangle$
- Vamos calcular as amplitudes β_j do vetor de saída.
- Vamos olhar para os β_j, onde j é um múltiplo de $\frac{M}{r}$, ou seja, $j = \frac{kM}{r}$
- O valor $\beta_{\frac{kM}{r}}$ é o produto da $(\frac{kM}{r})$-ésima linha de F_M pelo vetor de entrada

(Atenção, nesta notação a primeira linha é a 0-ésima linha)

- Portanto $\beta_{\frac{kM}{r}} = \sum_{j=0}^{\frac{M}{r}-1} \sqrt{\frac{r}{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{M}}\, \omega^{jr\,\frac{kM}{r}} = \frac{M}{r}\,\frac{\sqrt{r}}{M} = \frac{1}{\sqrt{r}}$

Como cada uma das r amplitudes $\beta_{\frac{kM}{r}}$ é igual a $\frac{1}{\sqrt{r}}$ e o a soma do quadrado do módulo destas r amplitudes β_j é 1, as demais amplitudes devem ser 0, e o teorema está provado.

Exercício 6: execute a QFT para um exemplo em que $M = 32$ e $r = 4$.