Computação Quântica
Aula 18

Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

Reversão sobre a média: Circuito

Seja $U_{\neq 0^n}$ o circuito quântico que calcula a função booleana:

- $f(x) = 0$ se $x = 0^n$
- $f(x) = 1$ caso contrário

Reversão sobre a média: Circuito

Seja $U_{\neq 0^n}$ o circuito quântico que calcula a função booleana:

- $f(x) = 0$ se $x = 0^n$
- $f(x) = 1$ caso contrário

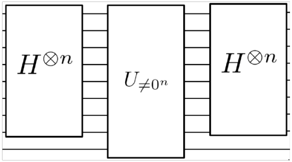
O circuito que calcula a inversão sobre a média é:

Reversão sobre a média: Circuito

Seja $U_{\neq 0^n}$ o circuito quântico que calcula a função booleana:

- $f(x) = 0$ se $x = 0^n$
- $f(x) = 1$ caso contrário

O circuito que calcula a inversão sobre a média é:

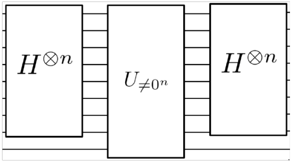


Reversão sobre a média: Circuito

Seja $U_{\neq 0^n}$ o circuito quântico que calcula a função booleana:

- $f(x) = 0$ se $x = 0^n$
- $f(x) = 1$ caso contrário

O circuito que calcula a inversão sobre a média é:



- Veremos que no algoritmo completo, o bit que controla a saída de $U_{\neq 0^n}$ estará setado para $|-\rangle$
- Portanto, para mostrarmos que, de fato o circuito acima faz a reversão sobre a média, devemos mostrar que a matriz $H^{\otimes n} U \, H^{\otimes n}$ faz a inversão sobre a média, sendo que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Grover: Matriz Unitária

$$
\begin{aligned}
D &= H_N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} H_N \\
&= H_N \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - I \right) H_N \\
&= H_N \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} H_N - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \end{pmatrix} - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N - 1 & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N - 1 & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Grover: Matriz Unitária

$$
\begin{aligned}
D &= H_N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} H_N \\
&= H_N \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - I \right) H_N \\
&= H_N \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} H_N - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \end{pmatrix} - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N-1 & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N-1 & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Agora veremos o que D faz com um vetor com amplitudes α_i de entrada:

$$
\boxed{D \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}}
$$

Observe que cada β_i é precisamente $\frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \; -\alpha_i =$

Algoritmo de Grover: Matriz Unitária

$$
\begin{aligned}
D &= H_N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} H_N \\
&= H_N \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - I \right) H_N \\
&= H_N \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} H_N - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N \end{pmatrix} - I \\
&= \begin{pmatrix} 2/N-1 & 2/N & \cdots & 2/N \\ 2/N & 2/N-1 & \cdots & 2/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2/N & 2/N & \cdots & 2/N-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Agora veremos o que D faz com um vetor com amplitudes α_i de entrada:

$$
\boxed{D \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}}
$$

Observe que cada β_i é precisamente $\frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i - \alpha_i = 2\mu - \alpha_i$

Circuito completo: