Universidade Federal do Paraná
Professor Murilo V. G. da Silva
Segunda lista de exercícios

QUESTÃO 1: Forneça a inversa das seguintes portas quânticas: X, $R_{\frac{\pi}{4}}$, Z, $CNOT$ e H:

QUESTÃO 2: Suponha que uma matriz unitária U mapeie o vetor $|0\rangle$ para $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle$ e o vetor $|1\rangle$ para $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1+i}{2}|1\rangle$. Qual é a matriz U?

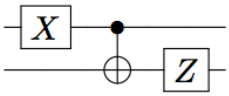
QUESTÃO 3: Qual é o valor de ZX aplicado a $|0\rangle$? E qual é o valor de ZX aplicado a $H|0\rangle$? Responda a pergunta e depois desenhe os circuitos equivalentes lembrando que a direção dos qubits no circuito é revertido em relação às multiplicações de matrizes.

QUESTÃO 4: Suponha que temos um qubit no estado $|\psi\rangle$. Sabemos que se o medirmos na base padrão (ou seja, na base computacional), a probabilidade de obter 0 é 2/9. Se ao invés de medirmos na base padrão, primeiramente nós aplicarmos uma porta H e depois medimos o qubit resultante na base de Hadamard, qual é a probabilidade de obter +?

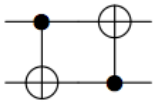
QUESTÃO 5: Duas portas A e B comutam se, dado um estado quântico, a aplicação de A seguida da aplicação de B gera o mesmo resultado que a aplicação de B seguida da aplicação de A. Quais dos seguintes pares de portas comutam? Justifique suas respostas.

- I e X
- X e Z
- H e X
- CNOT e X (sendo que X é aplicado ao qubit de destino do CNOT)

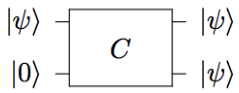
QUESTÃO 6: Suponha que temos um estado quântico $|\Psi\rangle$ com 2 qubits e aplicamos a ele o circuito abaixo e obtemos o estado $|\Psi'\rangle$. Que circuito devemos aplicar a $|\Psi'\rangle$ para recuperarmos nosso estado original $|\Psi\rangle$?



QUESTÃO 7: Embora a porta CNOT seja útil para emaranhar qubits, após aplicarmos o circuito abaixo ao estado $(a\,|0\rangle + b\,|1\rangle)\,|0\rangle$, obtemos um estado que **não** é emaranhado. Quais são os dois qubits resultantes?



QUESTÃO 8: Sabemos a priori que o qubit $|\psi\rangle$ está em um dos dois estados: $|+\rangle$ ou $|-\rangle$. É possível construir um circuito como o descrito abaixo? Em caso afirmativo, descreva o circuito (explicando qual o estado do sistema de qubits a cada momento do circuito).



QUESTÃO 9: Alice e Bob compartilham o estado $a\,|{+}{+}\rangle + b\,|{-}{-}\rangle$, onde o primeiro qubit é da Alice e o segundo qubit é de Bob. Alice mede seu qubit na base padrão e envia o resultado (o bit clássico) para Bob. Se Bob quiser obter o estado $a\,|+\rangle + b\,|-\rangle$, que porta ele deve aplicar ao seu qubit nos casos (1) e (2) abaixo? Ele pode escolher uma porta dentre I, X, Z e H. Justifique sua resposta.

(1) Alice obteve o bit 0:

(2) Alice obteve o bit 1:

QUESTÃO 10: Vimos em sala que dado um circuito clássico C_f que computa a função $f : \{0,1\}^n \Rightarrow \{0,1\}^{n'}$, então é possível obter um circuito quântico Q_f, tal que Q_f toma como entrada $x0^m$ e devolve como saída $xf(x)0^{m'}$. Ou seja, a entrada é a concatenação de x com 0^m e a saída é a concatenação de x, $f(x)$ e $0^{m'}$, onde a quantidade de 0's auxiliares m, m' na entrada e saída dependem do circuito em questão e, obviamente, $n + m = n + n' + m'$. Descreva como fazemos para obter Q_f a partir de C_f usando o processo visto em sala.

QUESTÃO 11: Seja Q_f o circuito quântico computando a função f da questão anterior. Se fornecermos como entrada para o circuito Q_f o estado $\sum_{x\in\Sigma^n} \alpha_x\,|x\rangle\,|0\rangle$, qual será as saída do circuito?

Créditos: Alguns dos exercícios desta lista contém questões de prova de edições do curso "Quantum Mechanics and Quantum Computation" (Professor Umesh Vazirani, Universidade de Berkeley).