Universidade Federal do Paraná
Professor Murilo V. G. da Silva
Terceira lista de exercícios

QUESTÃO 1: Qual é o valor de $H^{\otimes 2}|01\rangle$? Após aplicar a Transformada de Hadamard ao sistema quaântico original (i.e., $|01\rangle$), se fizermos uma medida of final do processo, qual é a probababilidade de obtermos cada uma das strings clássicas $x \in \{0,1\}^2$?

QUESTÃO 2: Dada uma string binária $y = y_1 y_2 ... y_n$, qual é o valor de $H^{\otimes n}|y\rangle$?

QUESTÃO 3: Suponha que $H^{\otimes 3}|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$. Qual é o valor de $|\phi\rangle$?

QUESTÃO 4: Desenhe o circuito da Amostragem de Fourier para uma entrada de n qubits.

QUESTÃO 5: Qual é o estado resultante quando aplicamos $H^{\otimes n}$ ao estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0^n\rangle + |1^n\rangle)$?

QUESTÃO 6: Fazendo-se uma amostragem de Fourier no estado $\frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle - |001\rangle + |010\rangle - |011\rangle + |100\rangle - |101\rangle + |110\rangle - |111\rangle)$, quais são os resultado possíveis?

QUESTÃO 7: Seja U_f a matriz unitária que computa a função booleana $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Prove que $U_f \left|x\right\rangle \left|-\right\rangle = (-1)^{f(x)} \left|x\right\rangle \left|-\right\rangle$ (em outras palavras, prove que a técnica "phase kickback" funciona).

QUESTÃO 8: Descreva o Algoritmo de Bernstein-Vazirani (qual é o problema, qual é o circuito, os estados dos qubits em cada parte do circuito, etc).

QUESTÃO 9: Descreva o Algoritmo de Simon. (qual é o problema, quais são as etapas do algoritmo, qual é o circuito quântico, qual é a parte clássica, os estados dos qubits em cada parte do circuito, etc).

QUESTÃO 10: Suponha que temos $|\phi\rangle = \sum_{y \in \{0,1\}^n} \beta_y |y\rangle$ tal que $\beta_y = 0$ se $s \cdot y = 1 \bmod 2$ e $\beta_y = \frac{1}{2^{(n-1)/2}}$ se $s \cdot y = 0 \bmod 2$, onde s é uma sting secreta de n bits (assumindo $s \neq 0^n$).

- Fazendo uma amostragem de Fourier em ϕ, qual a probabilidade de obter s

- Qual é o resultado obtido quando ele é diferente de s?

QUESTÃO 11: Vamos executar o Algoritmo de Simon. Suponha que $n = 4$ e que a string secreta s é 1101.

(a) Qual é o estado dos $2n$ qubits (ou seja, dos dois registradores) após aplicar a tranformada de Hadamard nos primeiros n primeiros qubits (primeiro registrador) e fazer a *query* à função f?

(b) Digamos que medimos o segundo registrador e obtemos 0101. Se sabemos que $f(1001) = 0101$, qual o estado do sistema neste ponto?

(c) Agora fazemos uma amostragem de Fourier no primeiro registrador. Quais são as possíveis resultados?

QUESTÃO 12: Novamente suponha que $n = 4$, mas desta vez não sabemos qual é a string secreta. Suponha que rodamos 4 vezes o Algoritmo de Simon e obtemos 0000, 1101, 1010, e 0110. Qual é a string secreta s?

QUESTÃO 13: Explique com suas palavras a diferença entre a Tranformada Discreta de Fourier (a versão clássica) e a Transformada Quântica de Fourier. Qual é a vantagem e qual é a desvantagem de cada uma delas, sabendo que para a matriz F_N de tais tranformadas, a complexidade de tempo da versão clássica é polinomial em N e na versão quântica, a complexidade de tempo (i.e., a quantidade de portas quânticas na implementação do circuito equivalente a matriz) é logaritmico em N.

QUESTÃO 14: Compute a QFT F_6 dos estados. Embora você precise justificar sua resposta, você não precisa fazer a multiplicação da matriz passo a passo. Basta você mostrar a resposta e justificar usando as propriedades da QFT quando aplicadas a superposições periódicas ou superposições circulares.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |3\rangle)$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |4\rangle)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |2\rangle + |4\rangle)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |3\rangle + |5\rangle)$

QUESTÃO 15: Suponha que k divide M. Qual é o estado obtido ao aplicarmos a QFT F_M ao estado abaixo:

$$|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{k}{M}} \sum_{j=0}^{M/k-1} |jk+1\rangle$$

Obs: Alguns dos exercícios desta lista contém questões de prova de edições do curso "Quantum Mechanics and Quantum Computation" (Professor Umesh Vazirani, Universidade de Berkeley).